VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XVI

Palchetto

Num.° d' ordine 32116

18 T 32

NAZIONALE
B. Prov.
VITT. EM. III
23.4
NAPOLI

B. Prov.
I
2354

Digitized by Google

Digitized by Google

THÉORIE

DES

LOGARITHMES

Digitized by Google

Ouvrages du même Auteur qui se trouvent à la même Librairie :

Éléments d'arithmétique théorique et pratique. 2e édition, conforme aux nouveaux programmes d'enseignement. 1 volume in-8.

Traité d'algèbre élémentaire comprenant des aperçus nouveaux sur la discussion des équations du premier degré, l'étude des généralités de l'arithmétique, et un très-grand nombre de problèmes et d'exercices. 1 volume in-8.

Éléments de trigonométrie théorique et pratique conformes aux nouveaux programmes d'enseignement, avec des types de calculs pour la résolution numérique des triangles. 1 volume in-8.

Imprimerie de Ch. Lahure (ancienne maison Crapelet)
rue de Vaugirard, 9, près de l'Odéon.

Digitized by Google

608541

THÉORIE

DES

LOGARITHMES

conforme aux nouveaux programmes d'enseignement

PAR

E. A. TARNIER
Docteur ès sciences mathématiques

PARIS
LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie
RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 14
(Près de l'École de Médecine)

1853

14280

PRÉFACE.

Dans la seconde édition de nos *Éléments d'Arithmétique*, nous n'avons pas reproduit la *Théorie des Logarithmes* telle qu'elle était dans la première : nous nous sommes attaché à la restreindre dans les limites des programmes officiels de l'instruction publique.

D'un autre côté, nous avons entendu souvent des professeurs exprimer le regret qu'on n'eût encore rien publié sur la manière de disposer et de coordonner les calculs logarithmiques. Convaincu, par notre propre expérience, de la justesse de leur remarque, nous avions déjà entrepris de remplir cette lacune dans nos *Éléments de Trigonométrie*, en ce qui concerne les applications trigonométriques.

Cet opuscule reprend la Théorie des logarithmes à son origine. Pour nous conformer encore aux programmes universitaires, nous insistons sur l'*usage des caractéristiques négatives :* c'est même là notre principal objet.

Cependant nous avons donné aussi la *Méthode des compléments arithmétiques*, parce qu'elle est employée à l'École d'état-major et au Dépôt de la guerre.

Du reste, les deux méthodes sont entièrement distinctes : l'étude de l'une n'exige pas la connaissance de l'autre.

L'une suppose des notions algébriques ; l'autre s'appuie uniquement sur l'arithmétique. Mais l'étendue que nous avons

cru devoir donner aux détails pratiques du calcul ne permettait d'introduire ce travail ni dans les *Éléments d'Arithmétique*, ni dans les *Éléments d'Algèbre*.

Puisse cette nouvelle tentative être aussi favorablement accueillie que notre premier essai dans nos *Éléments de Trigonométrie!*

E. A. T.

Digitized by Google

PROGRAMME DÉVELOPPÉ.

Propriétés principales des progressions. — Ce qu'on appelle progression arithmétique ou par différence. — Raison. — Exemples de progressions. — Progression croissante. — Progression décroissante. — Comment on forme une progression dont on connaît le premier terme et la raison.—Valeur d'un terme de rang quelconque. — Cas où la progression commence par 0.— Comment on peut trouver un terme d'une progression sans passer par les termes intermédiaires quand on connaît le premier terme et la raison. — Insérer des moyens arithmétiques entre deux nombres donnés. — Cas où il n'y a qu'un moyen à insérer. — Règle pour calculer la moyenne arithmétique entre deux nombres. — Ce qui arrive quand on insère le même nombre de moyens arithmétiques entre les termes consécutifs d'une progression. — Remarque importante.

Ce qu'on appelle progression géométrique ou par quotient. — Raison. — Exemples de progressions. — Progression croissante. — Progression décroissante. — Comment on forme une progression géométrique dont on connaît le premier terme et la raison. — Valeur d'un terme de rang quelconque. — Cas où la progression commence par l'unité. — Comment on peut trouver un terme d'une progression géométrique sans passer par les termes intermédiaires quand on connaît le premier terme et la raison. — Insérer des moyens géométriques entre deux nombres donnés. — Difficulté relative à cette question. — Cas où il n'y a qu'un moyen à insérer. — Règle pour calculer la moyenne géométrique entre deux nombres. — Ce qui arrive quand on insère le même nombre de moyens entre les termes consécutifs d'une progression géométrique. — Remarque importante.

Propriétés des logarithmes.—Recherche de l'origine des logarithmes. — Définition des nombres ainsi appelés. — Principe fondamental. — Nécessité de l'étendre à tous les nombres entiers ou fractionnaires. — Logarithme d'une puissance.—Logarithme d'un quotient.— Logarithme d'une racine.—Nécessité d'avoir une table de logarithmes.—Comment on peut concevoir la construction de cette table.—Calcul par approximation du logarithme d'un nombre donné. —Manière d'obtenir le logarithme d'un nombre décomposable en facteurs premiers. —Caractéristique. — Sa définition. — Comment on peut l'écrire à la simple inspection du nombre. — Changement qu'éprouve le logarithme d'un nombre, suivant qu'on le multiplie ou qu'on le divise par une puissance de 10. — Changement qu'éprouve un nombre suivant qu'on augmente ou qu'on diminue la caractéristique du logarithme de ce nombre d'un certain nombre d'unités.— Conclusion relative aux logarithmes des nombres de même figure.

Disposition des tables de Callet. — Examen des trois parties principales dont se compose la table. — Examen d'une propriété fondamentale de la table relative à la proportionnalité des différences entre les nombres et les différences entre les logarithmes de ces nombres.

Usage de la table. — Trouver le logarithme d'un nombre entier ou décimal. — Exemples divers. — Usage des parties proportionnelles. — Règle générale. Trouver le nombre correspondant à un logarithme donné. — Exemples divers. — Règle générale.

Éléments du calcul logarithmique. — Multiplication. — Division. — Puissance. — Extraction de racine.

Manière d'appliquer le calcul logarithmique aux nombres plus petits que l'unité. — Difficulté de faire entrer un nombre plus

petit que l'unité dans un calcul logarithmique. — Multiplication préalable du nombre par 10^{10}. — Manière d'indiquer le logarithme d'un nombre 10^{10} fois plus grand. — Retour au nombre d'un pareil logarithme. — Moyen de suppléer à l'impossibilité de certaines soustractions.— Méthode des compléments.

Usage des compléments dans le calcul logarithmique. — Manière de faire une division par logarithme, que cette division soit possible ou impossible. — Cas où le diviseur est plus petit que l'unité. — Cas où le dividende et le diviseur sont chacun moindres que l'unité. — Puissance d'un nombre moindre que l'unité. — Extraction de la racine d'un nombre moindre que l'unité. — Locution en usage à l'égard du logarithme d'un nombre moindre que l'unité. — Moyen d'effectuer par addition les calculs de l'arithmétique. — Types logarithmiques résumant toutes les difficultés qui peuvent se présenter dans la pratique.

Méthode des caractéristiques négatives. — Autre manière de représenter le logarithme d'une fraction décimale multipliée préalablement par une certaine puissance de 10. — Définition de la caractéristique négative. — Moyen de l'écrire à la seule inspection du nombre. — Règle pour trouver le logarithme d'une fraction décimale proprement dite. — Règle pour trouver le nombre correspondant à un logarithme dont la caractéristique est négative. — Nécessité d'étendre aux nombres plus petits que l'unité les règles du calcul logarithmique rigoureusement établies pour les nombres plus grands que l'unité. — Extension du principe fondamental. — Manière générale de l'énoncer. — Conséquences générales de ce principe.

Des quatre opérations relatives à un logarithme dont la caractéristique est négative. — Addition. — Soustraction. — Multiplication — Division. — Prescription à suivre pour ramener tous les calculs à une simple addition. — Application de la méthode aux divers exemples déjà traités par l'algorithme des compléments.

Applications des logarithmes aux formules de la géométrie.— Aire du rectangle ou du parallélogramme. — Aire du carré. — Aire du triangle. — Id. en fonction des trois côtés. — Aire du triangle équilatéral. — Aire du trapèze. — Id. en fonction des quatre côtés. — Longueur d'une circonférence. — Id. en fonction du diamètre. — Longueur d'un arc. — Rayon d'une circonférence dont on connaît la longueur. — Aire du cercle. — Id. en fonction du diamètre. — Rayon du cercle dont on connaît la surface. — Diamètre du cercle dont on connaît la surface. — Anneau circulaire. — Rayon d'un cercle, différence de deux cercles. — Aire du secteur. — Aire de l'ellipse. — Calcul approximatif du nombre π par la méthode des périmètres inscrits.— Volume du parallélipipède ou du prisme. — Volume de la pyramide. — Volume du tétraèdre régulier. — Côté d'un tétraèdre régulier en argent d'une valeur donnée. — Volume de la pyramide tronquée. — Volume du prisme tronqué. — Surface latérale du cylindre. — Volume du cylindre. — Dimensions du litre cylindrique pour les liquides. — Dimensions du litre cylindrique pour les matières sèches. — Surface latérale du cône. — Volume du cône. — Surface latérale du cône tronqué. — Volume du cône tronqué. — Surface de la sphère. — Id., connaissant son diamètre. — Rayon de la sphère, connaissant sa surface. — Rayon d'une sphère d'or valant 20 francs. — Volume de la sphère. — Id. en fonction du diamètre.

Note sur l'emploi des petites tables de parties proportionnelles dans les calculs de logarithmes.

THÉORIE

DES LOGARITHMES.

Les numeros de renvoi relatifs à l'Arithmétique se rapportent à notre seconde édition.

§ 1. Propriétés principales des progressions.

1. Définitions. *Une progression arithmétique, ou progression par différence, est une suite de nombres tels, que chacun d'eux surpasse celui qui le précède ou en est surpassé d'une quantité constante.* Cette quantité constante se nomme la *raison* de la progression, et les différents nombres dont la suite compose la progression s'appellent les *termes* de cette progression.

Exemple I. Les nombres 1, 2, 3, 4, 5,... forment une progression dont la raison est 1; les termes de cette progression sont 1, 2, 3, 4,....

Exemple II. Les nombres 11, 15, 19, 23,... sont en progression arithmétique dont la raison est 4.

Exemple III. Les nombres 23, 19, 15, 11,... sont en progression arithmétique dont la raison est 4.

La progression est dite *croissante* ou *décroissante*, suivant que les termes vont en augmentant ou en diminuant; dans les exemples I et II, la progression est croissante, et l'on peut la prolonger indéfiniment; dans l'exemple III, la progression est décroissante, et l'on ne peut la prolonger qu'autant que la soustraction est possible.

Dans une progression croissante, la raison s'obtient en diminuant un terme de son *précédent;* dans une progression dé-

croissante, au contraire, la raison s'obtient en diminuant un terme de son *suivant*.

2. *Connaissant le premier terme et la raison* d'une progression arithmétique, chaque terme qui suit s'obtient en augmentant ou en diminuant le précédent de la raison, suivant que la progression est croissante ou décroissante : dans ce dernier cas, on s'arrête dès que la soustraction devient impossible.

3. D'après ce qui précède, dans une progression arithmétique croissante le second terme est égal au premier, plus la raison; le troisième est égal au second, plus la raison, et, par conséquent, au premier plus deux fois la raison; le quatrième est égal au troisième, plus la raison, et, par conséquent, au premier, plus trois fois la raison; le cinquième est égal au premier, plus quatre fois la raison; et, en général, *un terme de rang quelconque, dans une progression arithmétique croissante, est égal au premier*, PLUS *autant de fois la raison qu'il y a de termes avant celui que l'on considère.*

Par un raisonnement semblable, on voit que, *un terme de rang quelconque, dans une progression arithmétique décroissante, est égal au premier*, MOINS *autant de fois la raison qu'il y a de termes avant celui que l'on considère.*

4. Si, dans une progression arithmétique croissante, le premier terme est *zéro*, chaque terme est un multiple de la raison dont le degré de multiplicité est marqué par le nombre des termes qui précèdent; réciproquement, un multiple de la raison est un terme de la progression, car pour l'obtenir, il suffit de prendre dans la progression le terme qui a autant de termes avant lui que le multiple donné contient de fois la raison.

5. La loi de composition des termes d'une progression arithmétique permet de *trouver un terme de cette progression sans passer par tous les termes intermédiaires, quand on connaît le premier terme et la raison.*

Soit à trouver le 10e terme de la progression dont 3 est le 1er terme, et 4 la raison.

Je multiplie la raison 4 par le nombre 9 des termes qui précèdent celui que je veux obtenir; au produit 36 j'ajoute le 1er terme donné 3, et la somme 39 est le terme demandé. En

effet, si, d'après le n° 2, je forme les termes successifs de la progression, j'obtiens 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, qui satisfait aux conditions de la question.

6. On peut encore *trouver tous les termes* INTERMÉDIAIRES *d'une progression arithmétique dont on connaît le nombre total des termes* 8, *et les deux termes extrêmes* 4 et 25.

Le nombre des termes intermédiaires inconnus est de 8 — 2 ou 6; il y a donc 6 + 1, ou 7 termes avant le dernier 25; donc, le dernier terme 25 vaut le premier 4 plus 7 fois la raison; par suite, 25 — 4 ou 21 vaut 7 fois la raison; divisant 21 par 7, le quotient 3 est la valeur de la raison; connaissant le premier terme et la raison, j'obtiens immédiatement 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 pour la progression demandée.

Les nouveaux termes 7, 10, 13, 16, 19, 22 sont ce qu'on appelle des moyens arithmétiques insérés entre 4 et 25. En général, *insérer un certain nombre de moyens arithmétiques entre deux nombres donnés, c'est trouver des nombres qui, placés entre ces deux nombres, forment avec eux une progression arithmétique;* par conséquent,

RÈGLE. *Pour insérer un certain nombre de moyens arithmétiques entre deux nombres donnés, on divise la différence de ces deux nombres par le nombre plus un des moyens à insérer; le quotient de cette division est la raison; on forme la progression en partant du premier des deux nombres et de la raison.*

7. REMARQUE. On pourrait n'avoir qu'un seul moyen à insérer entre deux nombres donnés, 11 et 25 par exemple. On retranche 11 de 25; le reste est 14; on divise 14 par 1 plus 1, ou par 2; le quotient, ou la raison, est 7, et l'on a 11, 18, 25 pour la progression demandée.

Ce nombre 18, qui surpasse 11 d'autant qu'il est surpassé par 25, est ce qu'on appelle la *moyenne arithmétique* entre 11 et 25; or, 18 vaut 11 plus la raison, d'une part, et 25 moins la raison, d'autre part; donc deux fois 18 valent 11 plus 25, et une fois 18 vaut la moitié de 11 plus 25 : ainsi 18 est la *demi-somme des deux nombres* 11 et 25; par conséquent, *la moyenne arithmétique entre deux nombres* (ou le nombre qui surpasse l'un d'autant qu'il est surpassé par l'autre) *est égale à la demi-*

somme de ces nombres. C'est ce que nous avons déjà eu l'occasion d'établir en arithmétique au n° **341**.

8. *Si, entre les termes consécutifs d'une progression arithmétique on insère un même nombre de moyens arithmétiques, la raison est la même dans toutes les progressions partielles; par suite, ces progressions forment une seule et même progression arithmétique.*

En effet, pour obtenir la nouvelle raison, on divise par le même nombre (celui des moyens à insérer, plus un) la différence de deux termes consécutifs; or, cette différence est la même dans toute l'étendue de la progression; donc ces progressions partielles forment une seule et même progression, puisque le dernier terme de chacune est en même temps le premier terme de la suivante.

Exemple. J'insère 3 moyens entre les termes consécutifs de la progression 11, 19, 27, 35, 43,... et j'obtiens la nouvelle progression 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35,....

9. Il suit de là qu'en partant d'une progression arithmétique donnée, on peut établir une nouvelle progression dont les termes consécutifs diffèrent entre eux d'une très-petite quantité. Il suffit pour cela que le nombre des moyens soit très-grand, car alors la nouvelle raison sera le quotient de la division de la raison primitive par un très-grand nombre; et même, si l'on conçoit que le nombre des moyens à insérer dépasse tout degré possible de grandeur, la différence des termes consécutifs dépassera tout degré possible de petitesse.

10. Définition. *Une progression géométrique ou progression par quotient est une suite de nombres tels, que le rapport de chacun d'eux au précédent est un nombre constant.*

Ce nombre constant se nomme la *raison* de la progression, et les différents nombres dont la suite compose la progression, s'appellent les *termes* de la progression.

Exemple I. Les nombres 1, 10, 100, 1000,... forment une progression géométrique dont la raison est 10.

Exemple II. Les nombres 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,... forment une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2}$.

La progression est *croissante* ou *décroissante* suivant que les termes vont en augmentant ou en diminuant : dans le premier cas, la raison est *plus grande que l'unité*; dans le second, elle est *plus petite que l'unité*.

11. Connaissant le premier terme et la raison d'une progression géométrique, chaque terme qui suit s'obtient en multipliant le précédent par la raison.

12. Le second terme d'une progression géométrique est égal au premier multiplié par la raison; le troisième est égal au second multiplié par la raison; donc ce troisième est égal au premier multiplié par le *carré* de la raison; le quatrième est égal au troisième multiplié par la raison, et par conséquent au premier multiplié par le cube de la raison; le cinquième est égal au premier multiplié par la quatrième puissance de la raison : en général, *un terme de rang quelconque d'une progression géométrique est égal au premier multiplié par la raison élevée à une puissance d'un degré marqué par le nombre des termes qui précèdent celui que l'on considère.*

13. Si le premier terme d'une progression géométrique est l'*unité*, chaque terme est une puissance de la raison dont le degré est marqué par le nombre des termes qui précèdent; réciproquement, une puissance de la raison est un terme de la progression, car, pour l'obtenir, il suffit de prendre dans la progression le terme qui a autant de termes avant lui qu'il y a d'unités dans le degré de la puissance donnée.

14. La loi de composition des termes d'une progression par quotient permet de *trouver un terme quelconque d'une progression géométrique sans passer par tous les termes intermédiaires quand on connaît le premier terme et la raison.*

Soit à trouver le 5ᵉ terme de la progression géométrique dont 2 est le premier terme, et 3 la raison.

Avant le 5ᵉ terme cherché, il y a 4 termes; je forme la 4ᵉ puissance de 3, et j'ai 81; je multiplie 81 par le premier terme 2, et j'ai 162 pour le nombre demandé. En effet, si d'après le nº **11**, je forme les termes successifs de la progression, j'obtiens 2, 6, 18, 54, 162.

15. On peut encore *trouver tous les termes* INTERMÉDIAIRES *d'une progression géométrique dont on connaît le nombre 5 des termes, et les deux termes extrêmes 25 et 15625.*

Le nombre des termes intermédiaires cherchés est 5—2 ou 3; le nombre des termes qui précèdent le dernier 15625 est donc $3+1$ ou 4; mais 15625 vaut le premier 25 multiplié par la 4ᵉ puissance de la raison (**12**), donc $\frac{15625}{25}$, ou 625, vaut la 4ᵉ puissance de la raison; par conséquent, j'aurai la raison en extrayant la racine 4ᵉ de 625; or, une racine 4ᵉ s'obtient par deux racines carrées successives (*Arithm.*, nº **367**); la racine carrée de 625 est 25; la racine carrée de 25 est 5; connaissant la raison 5 et le premier terme 25, j'obtiens 25, 125, 625, 3125, 15625 pour la progression demandée.

Les nouveaux termes 125, 625 et 3125 sont ce qu'on appelle des moyens géométriques insérés entre 25 et 15625. En général, *insérer un certain nombre de moyens géométriques entre deux nombres donnés, c'est trouver des nombres qui, placés entre ces deux nombres, forment avec eux une progression géométrique;* donc,

16. Règle. *Pour insérer un certain nombre de moyens géométriques entre deux nombres donnés, on divise le dernier nombre par le premier; on extrait de ce quotient une racine d'un degré marqué par le nombre plus un des moyens à insérer, puis on forme la progression en partant du premier terme, et en prenant pour la raison la racine obtenue.*

Exemple I. Insérer 5 moyens géométriques entre 2 et 1458. Je divise 1458 par 2, et j'ai 729 pour quotient; j'extrais la *racine sixième* de 729, en extrayant d'abord sa racine carrée, ce qui donne 27, puis la racine cubique de 27 qui est 3 (*Arithm.*, nº **367**); connaissant le premier terme 2, et la raison 3, j'ai 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458 pour la progression demandée.

Remarque. L'insertion des moyens géométriques est non-seulement plus compliquée que l'insertion des moyens arithmétiques, mais elle peut amener des racines que nous ne savons pas extraire. Qu'il s'agisse, par exemple, d'insérer quatre moyens géométriques entre deux nombres donnés : il faudra extraire la racine 5ᵉ du quotient de la division de l'un des nombres par l'autre, ce que nous ignorons quant à présent.

Toutefois, on peut insérer entre deux nombres donnés des moyens géométriques dont le nombre dépasse tel nombre donné qu'on voudra. Il suffit pour cela que le degré de la racine à extraire soit une puissance exacte de 2, afin qu'on puisse trouver la raison par des extractions de racines carrées successives, et que cette puissance de 2 diminuée d'une unité, c'est-à-dire le nombre des moyens, dépasse le nombre donné.

17. Remarque. On pourrait n'avoir qu'un seul moyen géométrique à insérer entre deux nombres donnés, 2 et 32 par exemple; la raison est la racine carrée de 16 ou 4, et j'ai 2, 8, 32 pour la progression demandée.

Ce nombre 8, qui contient 2 autant de fois qu'il est contenu dans 32, est ce qu'on appelle la *moyenne géométrique* entre 2 et 32; or, $\frac{8}{2}=\frac{32}{8}$; multipliant le premier membre de l'égalité par 8, puis le premier membre de la nouvelle égalité par 2, il vient $8^2=32\times2$; par suite, 8 est la *racine carrée du produit des deux nombres* 2 *et* 32. Donc, *la moyenne géométrique entre deux nombres donnés est égale à la racine carrée du produit de ces deux nombres.*

18. *Si, entre les termes consécutifs d'une progression géométrique on insère le même nombre de moyens géométriques, la raison est la même dans toutes les progressions partielles; par suite, ces progressions forment une seule et même progression géométrique.*

En effet, pour l'obtenir, on extraira une même racine du quotient de la division des termes consécutifs, quotient qui est le même dans toute l'étendue de la progression; d'où il suit que toutes ces progressions partielles formeront une seule et même progression, puisque le dernier terme de chacune sera en même temps le premier terme de la suivante.

Exemple. J'insère 3 moyens entre les termes consécutifs de la progression 7, 112, 1792, 28672, 458752,... et j'ai 7, 14, 28, 56, 112, 224, 448, 896, 1792, 3584, 7168, 14336, 28672, 57344, 114688, 229376, 458752,...

19. Il suit de là qu'en partant d'une progression géométrique donnée, on peut établir, soit exactement, soit approximativement, une nouvelle progression dont les termes consécutifs croissent d'une très-petite quantité. Il suffit pour cela que le

nombre des moyens soit très-grand, car alors la nouvelle raison sera la racine de la raison primitive, mais d'un degré très-grand : cette racine différera donc très-peu de l'unité; par suite, chaque terme sera égal au précédent multiplié par une fraction très-peu différente de l'unité; et même, si l'on conçoit que le nombre des moyens à insérer dépasse tout degré possible de grandeur, la différence des termes consécutifs dépassera tout degré de petitesse.

§ 2. Propriétés des logarithmes.

20. Si l'on compare les propriétés des progressions arithmétiques avec les propriétés des progressions géométriques, on est frappé d'une analogie remarquable :

Aux *additions*, *soustractions*, *multiplications* et *divisions* dans les premières, correspondent respectivement des *multiplications*, des *divisions*, des *élévations de puissances* et des *extractions de racines* dans les secondes.

Ce rapprochement se présente avec plus de simplicité quand le premier terme de la progression arithmétique est *zéro*, et que le premier terme de la progression géométrique est *l'unité*. Alors chaque terme de la première est un *multiple* de la raison (**4**); chaque terme de la seconde est une *puissance* de la raison (**13**), et le degré de multiplicité, ainsi que le degré de la puissance, sont chacun déterminés par le nombre des termes qui précèdent. Si donc j'écris la progression arithmétique sous la progression géométrique, de manière que les termes de même rang se correspondent, le degré de la puissance sera égal au degré de multiplicité dans les deux termes correspondants.

Cela posé, si, d'une part, je *multiplie* deux termes quelconques de la progression géométrique, j'aurai une puissance de la raison qui la contiendra comme facteur autant de fois qu'il y a de termes en tout avant le premier et avant le second des termes multipliés; si, d'autre part, *j'ajoute* les deux termes correspondants de la progression, j'aurai un multiple de la raison qui la contiendra autant de fois qu'il y a de termes en tout avant le premier et avant le second des deux termes ajou-

tés ; par conséquent, cette puissance et ce multiple seront eux-mêmes des termes correspondants dans les deux progressions.

De là cette PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE :

21. *Si deux progressions croissantes, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro, se correspondent terme à terme, le* PRODUIT *de deux termes de la première, et la* SOMME *des deux termes correspondants de la seconde, sont eux-mêmes des termes qui se correspondent dans ces deux progressions.*

Je vois donc que le *produit* de deux termes de la progression géométrique peut se trouver au moyen d'une simple *addition;* il suffit pour cela de chercher dans la progression arithmétique les termes qui correspondent chacun à chacun aux deux facteurs du produit; de faire leur somme, ce qui donnera un terme de la progression arithmétique; de chercher dans la progression géométrique le terme correspondant à cette somme : le nombre ainsi trouvé sera le produit cherché.

Telle est *l'origine* des *logarithmes.*

22. DÉFINITION. *On appelle logarithmes une suite de nombres en progression arithmétique, dont le premier terme est* 0, *correspondants terme pour terme à une suite de nombres en progression géométrique, dont le premier terme est* 1. *Chaque terme de la première est le logarithme du nombre correspondant dans la seconde.*

Au moyen de cette définition, le principe fondamental du n° **21** se traduira :

23. *Le logarithme du produit de deux nombres est la somme des logarithmes de ces nombres.*

La multiplication ne dépendrait, comme on le voit, que d'une simple addition; mais cette abréviation serait restreinte aux termes de la progression géométrique considérée.

Pour que le principe pût avoir un avantage pratique général, il faudrait que tous les nombres, entiers ou fractionnaires, pussent faire partie de cette progression géométrique.

24. Concevons deux progressions croissantes, l'une géométrique et l'autre arithmétique, commençant, la première par l'unité, la seconde par zéro; imaginons que l'on insère entre les termes de la première un très-grand nombre de moyens

géométriques, et entre les termes de la seconde un pareil nombre de moyens arithmétiques; nous obtiendrons deux nouvelles progressions (8) et (18), et les différences entre les termes consécutifs de la nouvelle progression géométrique seront très-petites; par conséquent, il arrivera de deux choses l'une : ou les nombres sur lesquels on veut opérer se trouveront parmi les termes de la nouvelle progression géométrique, ou chacun de ces nombres tombera entre deux termes consécutifs très-peu différents l'un de l'autre. Dans ce dernier cas, l'un des deux termes pourra représenter le nombre compris avec un très-grand degré d'approximation; le terme correspondant de la nouvelle progression arithmétique sera donc, en général, le logarithme d'un nombre très-peu différent du nombre que l'on considère; par conséquent, en appliquant le principe fondamental des logarithmes, l'erreur commise sera très-petite, puisqu'au fond le calcul se rapportera à des nombres très-peu différents de ceux sur lesquels on devait opérer. En conséquence, nous dirons que : *le logarithme du produit de deux nombres quelconques* (plus grands chacun que l'unité) *est la somme des logarithmes de ces nombres.*

Cette propriété s'étend à un produit d'autant de facteurs qu'on voudra. En effet, un produit de *trois* facteurs s'obtient en multipliant le produit effectué des deux premiers par le troisième; or, le logarithme de ce produit de deux facteurs est la somme des logarithmes des deux facteurs; donc, le logarithme du produit final est la somme de celui-là et du logarithme du troisième facteur, et, par conséquent, la somme des logarithmes des trois facteurs. De même, le logarithme du produit de quatre facteurs est la somme des logarithmes des trois premiers facteurs, augmentée du logarithme du quatrième, et, par conséquent, la somme des quatre logarithmes, et ainsi de suite; donc, *le logarithme du produit d'autant de nombres qu'on voudra* (et plus grands chacun que l'unité) *est la somme des logarithmes de ces facteurs.*

25. Si tous les facteurs du produit sont égaux entre eux, le produit est une *puissance* de l'un d'eux, et la somme des logarithmes des facteurs est le produit de l'un de ces logarithmes par leur nombre; donc, *le logarithme de la puissance d'un nom-*

bre (plus grand que l'unité) *est le produit du logarithme de ce nombre par le degré de la puissance.*

26. Dans toute division, le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient complet; par suite, le logarithme du dividende est égal au logarithme du diviseur augmenté du logarithme du quotient; donc, réciproquement, *le logarithme d'un quotient* (plus grand que l'unité) *est égal au logarithme du dividende diminué du logarithme du diviseur.*

27. La racine d'un nombre élevé à une puissance d'un degré marqué par l'indice de la racine, reproduit le nombre proposé; donc le logarithme de ce nombre est égal au logarithme de la racine multiplié par son indice; donc, réciproquement, *le logarithme d'une racine d'un nombre* (plus grand que l'unité) *est le quotient de la division du logarithme de ce nombre par l'indice de la racine à extraire.*

28. Remarque. A l'aide des quatre principes précédents, la *multiplication*, la *puissance*, la *division* et l'*extraction* des *racines* se trouvent dépendre respectivement de *l'addition*, de la *multiplication*, de la *soustraction* et de la *division*, c'est-à-dire d'une opération où la difficulté est moindre. Mais, pour réaliser cette conception, il faudrait avoir deux progressions renfermant un nombre immense de termes; heureusement on peut simplifier, à l'aide de considérations tirées elles-mêmes des propriétés des logarithmes.

§ 3. Table de logarithmes.

29. Toutes les opérations numériques ont pu dépendre jusqu'à présent du calcul des nombres *entiers*; par conséquent, les opérations faites à l'aide des logarithmes pourront ne dépendre que des logarithmes de ces nombres. Il suffirait pour cela d'avoir deux progressions telles, que la progression géométrique renfermât, du moins approximativement, tous les nombres entiers sur lesquels on aurait à opérer.

30. On est parti des deux progressions :

1,	10,	100,	1000,	10000,	etc.,
0,	1,	2,	3,	4,	etc.,

qui sont, la première, la suite des puissances successives de la *base* de notre système de numération décimale; la seconde, la suite naturelle des nombres.

Concevons que l'on applique à ces deux progressions ce que nous avons expliqué d'une manière générale au n° **24**; supprimons dans la nouvelle progression géométrique tous les nombres qui ne représentent pas approximativement les nombres entiers 2, 3, 4, 5,..., 11, 12, 13,..., 101, 102, 103,..., etc., etc., et ne gardons dans la progression arithmétique que les logarithmes correspondants aux termes conservés; prenons même les nombres entiers au lieu des termes qui les représentent approximativement; dressons une *table* renfermant, d'une part, ces nombres entiers, puis, d'autre part, en regard de chacun d'eux, le terme correspondant de la nouvelle progression arithmétique (terme que nous prenons pour le logarithme du nombre); nous aurons alors une table à colonnes qui nous permettra d'exécuter les opérations indiquées au n° **28**.

31. Pour se faire une idée exacte de cette *table de logarithmes*, il faut se rappeler que les nombres entiers consécutifs, bien qu'en progression arithmétique, doivent être censés extraits d'une progression géométrique, et que les logarithmes de ces nombres sont les termes de même rang dans une progression arithmétique.

Pour mettre à exécution cette conception, il faudrait insérer un très-grand nombre de moyens entre les termes consécutifs de la progression géométrique, et pareil nombre de moyens entre les termes de la progression arithmétique.

32. Pour éviter l'extraction des racines de degré supérieur qu'exigerait l'insertion de ce grand nombre de moyens géométriques, on pourrait insérer d'abord *une* moyenne géométrique entre tous les termes consécutifs de la première, et *une* moyenne arithmétique entre les termes consécutifs de la seconde. On aurait deux nouvelles progressions, et les termes de la seconde seraient encore les logarithmes des termes de la première. On recommencerait la même opération, et en continuant ainsi, on aurait deux progressions qui renfermeraient un très-grand nombre de termes insérés entre les termes consécutifs des deux progressions primitives.

Il est facile de comprendre que la longueur de ces calculs les rendrait impraticables.

Mais, quand on s'attache au calcul du logarithme d'un nombre en particulier, on peut le trouver approximativement en calculant un certain nombre de ces moyennes, et en se contentant de concevoir les autres pour se bien figurer le système des deux progressions.

33. Soit proposé, pour fixer les idées, de calculer le logarithme de 3.

Ce nombre, dans les deux progressions du n° **30**, tombe entre 1 et 10; donc son logarithme tombe entre le logarithme de 1 et le logarithme de 10, c'est-à-dire entre 0 et 1. J'insère une moyenne géométrique entre 1 et 10; cette moyenne est $\sqrt{1 \times 10}$ (**17**); je la calcule avec trois décimales exactes, par exemple, et je trouve 3,162; la moyenne arithmétique insérée entre 0 et 1 est 0,5 (**7**); donc 0,5 est le logarithme de 3,162; 3 tombe entre 1 et 3,162; son logarithme tombe donc entre 0 et 0,5; j'insère une moyenne géométrique entre 1 et 3,162; j'obtiens 1,778; la moyenne arithmétique insérée entre 0 et 0,5 est 0,25; donc 0,25 est le logarithme de 1,778; 3 tombe entre 1,778 et 3,162; son logarithme tombe donc entre 0,25 et 0,5; insérant, d'une part, une moyenne géométrique, et d'autre part, une moyenne arithmétique, je trouve que 0,375 est le logarithme de 2,371. En continuant ainsi à extraire des racines carrées, et à faire des divisions par 2, je vois que 3 se trouvera resserré entre deux moyennes géométriques extrêmement peu différentes l'une de l'autre; la moyenne arithmétique correspondante à l'une d'elles exprimera le logarithme de 3 avec une grande approximation. Il ne faut pas perdre de vue que ces raisonnements supposent les progressions complétées par les moyennes non calculées.

Dans ces opérations, on s'arrêtera dès qu'on aura trouvé deux moyennes géométriques comprenant le nombre 3, et différant l'une de l'autre de moins d'un millième.

Voici le tableau des opérations :

1.....	3,162.....	10
0.....	0,500.....	1

1.....	1,778.....	3,162
0.....	0,250.....	0,500
1,778.....	2,371.....	3,162
0,250.....	0,375.....	0,500
2,371.....	2,739.....	3,162
0,375.....	0,4375.....	0,500
2,739.....	2,943.....	3,162
0,4375.....	0,4687.....	0,500
2,943.....	3,051.....	3,162
0,4687.....	0,4843.....	0,500
2,943.....	2,996.....	3,051
0,4687.....	0,4765.....	0,4843
2,996.....	3,023.....	3,651
0,4765.....	0,4804.....	0,4843
2,996.....	3,009.....	3,023
0,4765.....	0,4784.....	0,4804
2,996.....	3,002.....	3,009
0,4765.....	0,4774.....	0,4784
2,996.....	2,999.....	3,002
0,4765.....	0,4769.....	0,4774

3 est reproduit à moins de un demi-centième par l'une des deux moyennes 2,999 et 3,002; on peut donc prendre pour son logarithme 0,4769 ou 0,4774. Ces deux nombres diffèrent de moins de 0,001, ils diffèrent donc de L.3, qui est intermédiaire, de moins de 0,001, par conséquent; en prenant 0,477 qui diffère de chacun d'eux de moins de 0,001, je pourrai dire que 0,477 est le logarithme cherché à 0,001 près *.

34. On peut encore abréger la construction de la table. Il suffit de calculer les logarithmes des nombres *premiers*, car le principe fondamental donnera le moyen d'obtenir les loga-

* L'existence du logarithme de 3 peut être établie comme celle de la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait; il suffit pour cela d'imaginer que l'on continue indéfiniment la méthode d'approximation que je viens de décrire.

rithmes des nombres composés. Le logarithme de 40, par exemple, vaut 3 fois le logarithme de 2, plus le logarithme de 5.

35. Remarque. Bien que cette manière de calculer les logarithmes soit déjà plus simple que la méthode indiquée au n° 30, les opérations seraient encore extrêmement longues. C'est par des procédés beaucoup plus abrégés (qui ne sauraient trouver place ici) que les tables actuellement en usage ont été construites; mais les idées très-simples qui précèdent suffisent pour en donner l'intelligence.

De la caractéristique.

36. Les puissances de 10 sont les seuls nombres dont les logarithmes sont des nombres *entiers*, et *les logarithmes de ces puissances contiennent autant d'unités qu'il y a de zéros dans la puissance.* Tous les autres nombres ont pour logarithmes des *nombres décimaux* dont la partie à gauche de la virgule qui est significative ou nulle, s'appelle la *caractéristique* du logarithme.

D'après les notions générales exposées précédemment, tous les nombres entiers ou fractionnaires compris entre 1 et 10 ont leurs logarithmes compris entre 0 et 1; par conséquent, la caractéristique de ces logarithmes est 0. Tous les nombres compris entre 10 et 100 ont leurs logarithmes compris entre 1 et 2; ces logarithmes ont donc 1 pour caractéristique. De même, les logarithmes des nombres compris entre 100 et 1000 ont 2 pour caractéristique, et ainsi de suite. En général,

37. *La caractéristique du logarithme d'un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, est égale au nombre des chiffres moins un de la partie entière de ce nombre. La caractéristique plus un du logarithme d'un nombre indique donc l'ordre des plus hautes unités de la partie entière de ce nombre.*

38. D'après le principe fondamental, si l'on *multiplie* ou si l'on *divise* un nombre par une puissance de 10, on augmente ou on diminue la caractéristique du logarithme de ce nombre d'autant d'unités qu'il y en a dans le degré de la puissance.

Réciproquement, si l'on augmente ou si l'on diminue la caractéristique du logarithme d'un certain nombre d'unités, on

multiplie ou l'on divise ce nombre par une puissance de 10 d'un degré marqué par le nombre des unités ajoutées ou retranchées. Donc,

39. *Tous les nombres de même figure ont des logarithmes dont la partie décimale est la même, et qui ne diffèrent que par la caractéristique.*

D'après cela, on comprendra facilement l'enchaînement des nombres suivants :

$$3{,}7735670 = \log 5937$$
$$4{,}7735670 = \log 59370$$
$$5{,}7735670 = \log 593700$$
etc. etc.

Réciproquement,

$$2{,}7735670 = \log 593{,}7$$
$$1{,}7735670 = \log 59{,}37$$
$$0{,}7735670 = \log 5{,}937$$

Cette propriété des logarithmes est mise à profit dans les tables :

40. 1° Il est inutile d'y inscrire les caractéristiques, puisqu'on les aperçoit à la seule inspection des nombres.

2° Si l'on veut une table qui renferme les logarithmes de tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'à 100 000, il est inutile d'y inscrire les nombres au-dessous de 10000, car le logarithme de 4537, par exemple, aura la même partie décimale que le logarithme de 45370.

Les notions qui précèdent suffisent pour faire bien comprendre la *disposition* des tables.

§ 4. Disposition des tables de Callet.

41. Les tables de *Callet* comprennent *trois* parties principales :

La *première*, sous le titre de Chiliade 1 *, renferme les 1200 premiers nombres en regard desquels se trouvent des nombres de 8 figures qui représentent les parties décimales des logarithmes ; les caractéristiques n'y sont point inscrites.

* Qui signifie premier mille ; mais il y a 200 nombres de plus, puisque la Chiliade va jusqu'à 1200.

La *seconde* donne directement avec 7 figures les parties décimales des logarithmes des nombres de *cinq* chiffres, depuis 10200 jusqu'à 100000; elle finit au milieu de la page qui porte en tête hors du cadre l'indication N 996.

Enfin, la *troisième* commence dans la page que je viens d'indiquer, et donne immédiatement avec 8 figures les parties décimales des logarithmes des nombres de 100000 à 108000.

Ire Partie. La Chiliade I déroge à la remarque IIe du n° 40, mais elle a l'avantage de donner les logarithmes des 1200 premiers nombres avec 8 figures au lieu de 7, et par conséquent avec une plus grande approximation. Ces 1200 nombres sont disposés dans chaque page en quatre colonnes, en haut desquelles on voit la lettre N. A côté et à droite de ces colonnes, on en trouve d'autres qui renferment des nombres de 8 chiffres; ce sont les parties décimales des logarithmes des nombres placés à gauche et sur la même ligne.

D'après cela, on voit immédiatement que :

$$\log 58 = 1,76342799$$
$$\log 534 = 2,72754126$$
$$\log 1200 = 3,07918125$$

42. IIe Partie. Cette seconde partie est véritablement le fond de la table. Les deux premières colonnes sont étrangères à notre sujet.

Cette deuxième partie, dont la disposition est toute différente de la précédente, commence à la page N 102; elle renferme tous les nombres de 5 chiffres depuis 10200 jusqu'à 100000, ainsi que la partie décimale de leurs logarithmes avec 7 figures. Les colonnes intitulées N contiennent les 4 premiers chiffres de ces nombres; le chiffre des unités se trouve au commencement de chaque page parmi les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que l'on voit inscrits dans une même ligne à la suite de la lettre N. La même disposition est répétée à la fin de chaque page. Le chiffre des unités qui est lu en tête de chaque colonne doit être rapproché par la pensée de la colonne N, afin d'avoir des nombres de 5 chiffres.

La colonne 0 *se distingue des autres en ce qu'elle est divisée elle-même en deux colonnes* : dans la première, se trouvent des

nombres de trois chiffres disposés de place en place, plus ou moins espacées, et, dans la seconde, des nombres de 4 chiffres.

Un nombre de 5 chiffres a ses *dizaines* exprimées par un nombre de la colonne N; si le chiffre de ses unités est 0, son logarithme se compose du nombre de 3 chiffres pris *à côté ou au-dessus* dans la colonne 0, le plus près possible, et du nombre de 4 chiffres de la même colonne, qui est vis-à-vis des quatre premiers chiffres du nombre proposé.

Si le chiffre des unités est 1, voici ce qu'indique la table : il faut prendre les quatre chiffres qui se trouvent dans la colonne intitulée 1, vis-à-vis des quatre premiers chiffres du nombre donné (si la place est vide, on prend les quatre chiffres au-dessous). Ces quatre chiffres doivent être précédés des trois chiffres de la colonne N qui sont à leur gauche, ou, si la place est vide, des trois qui sont au-dessus de cette place vide.

Semblablement, si le chiffre des unités est 2, 3, 4,..., 9, les quatre derniers chiffres du logarithme se trouvent sur la même ligne horizontale, et dans les colonnes intitulées 2, 3, 4,..., 9; on voit donc que cette partie de la table est une *table à double entrée*, puisqu'on lit les dizaines dans la colonne N, et les unités dans la ligne 0, 1, 2, 3,..., 9.

Les *trois premiers chiffres* qui, dans une page, commencent une colonne intitulée N, sont inscrits *en dehors du cadre*, et on les a fait précéder de la lettre N; pareillement, et aussi en dehors du cadre, se trouvent placés les trois premiers chiffres des logarithmes qui commencent la page, et que l'on voit précédés de la lettre L. La recherche du logarithme d'un nombre, ou d'un nombre correspondant à un logarithme, se trouve facilitée par cette indication extérieure.

Cela posé, j'ouvre la table à un endroit quelconque de la deuxième partie, à la page, par exemple, qui porte en dehors du cadre l'indication N 756. Je fixe mon attention sur le nombre 7569 de la colonne N, et sur le chiffre 8 de la première ligne, auquel cas le nombre en question (pris d'ailleurs au hasard) est 75698. La partie décimale du logarithme de ce nombre se compose des quatre chiffres 0844 que je trouve sous le chiffre 8 de la première ligne, et vis-à-vis des dizaines du nombre, précédés des trois chiffres 879 que je trouve dans la première colonne à gauche de 0844 et le plus proche en re-

montant. Quant à la caractéristique, elle est 4, parce que les plus hautes unités du nombre sont du cinquième ordre, en sorte que 4,8790844 est le logarithme de 75698.

On trouve le plus ordinairement les quatre derniers chiffres de la partie décimale du logarithme sous le chiffre des unités vis-à-vis le nombre de quatre chiffres qui exprime les dizaines. Or, souvent dans la table, on trouve un *espace blanc* au lieu de ce nombre. Dans ce cas, on lit les quatre chiffres immédiatement *au-dessous* du *blanc*, et les trois premiers se trouvent, comme je l'ai déjà dit, dans la première partie de la colonne 0, sur la même ligne que les quatre derniers.

Si, par exemple, j'ouvre la table à la page N 246, je vois que

$$\log 25177 = 4,4010040,$$

et à la page N 528,

$$\log 52969 = 4,7240218.$$

43. IIIe Partie. La dernière partie de la table qui, je le répète, commence à la page N 996, a exactement la même disposition que la précédente; elle n'en diffère qu'en ce que les dizaines des nombres dont on cherche les logarithmes, sont exprimées par cinq chiffres au lieu de quatre, et que les parties décimales de ces logarithmes renferment 8 figures au lieu de 7. Les quatre premières décimales se trouvent dans la première des deux parties de la colonne 0; les quatre dernières sont rangées comme dans la seconde partie de la table. Ainsi, j'ouvre la table à la page N 1068, et je vois que 106809 a pour logarithme 5,02860785.

44. Avant d'aller plus loin, je ferai remarquer une propriété fondamentale de la table.

J'ouvre cette table à la page qui porte en dehors du cadre l'indication N 726, et je vois que la différence des logarithmes des nombres entiers consécutifs de cinq chiffres qu'elle renferme, est constamment 60 jusqu'à la moitié de la page suivante. (Du moins, au degré d'approximation des logarithmes tabulaires, elle est constamment 60 depuis 72600 jusqu'à 73459 environ). Ainsi, au degré d'approximation de la table, pour des différences égales entre les nombres, on a des différences égales entre les logarithmes; d'où il suit que *les diffé-*

rences entre les nombres sont proportionnelles aux différences des logarithmes qui leur correspondent.

Par exemple, la différence 3 entre les nombres 73167 et 73164 est triple de la différence 1 entre 73167 et 73164, et en même temps la différence 178 des logarithmes des premiers ne diffère que de 2 unités de 180 triple de la différence 60 des logarithmes des derniers, et encore faut-il peut-être forcer 178 de 1 pour être plus près de la vraie différence.

Quand on prend la différence entre les logarithmes des nombres 73165 et 73164, on a 0,0000060, qui est le logarithme du quotient $\frac{73165}{73164}$ ou de $1+\frac{1}{73164}$. De même, on trouve avec la table que 0,0000060 est le logarithme du quotient $\frac{73166}{73165}$ ou de $1+\frac{1}{73165}$. Ces logarithmes égaux ne correspondent donc pas à des nombres parfaitement égaux; conséquemment, l'égalité des différences des logarithmes ne répond pas exactement à l'égalité des différences entre les nombres; par suite, la proportionnalité qui s'en déduit n'est elle-même qu'approchée.

Mais plus les nombres sont grands, plus les fractions $\frac{1}{73164}$, $\frac{1}{73165}$, $\frac{1}{73166}$, sont petites en même temps; d'où il suit qu'il y a moins d'erreur relative à les prendre les unes pour les autres. Donc,

La proportionnalité des différences entre les nombres aux différences entre leurs logarithmes est d'autant plus approchée que les nombres considérés sont plus avancés dans la table.

On reconnaît, en effet, qu'en remontant vers le commencement, on trouve, entre les logarithmes des nombres consécutifs, des différences de plus en plus inégales. Lors donc qu'on voudra faire usage de la proportionnalité énoncée, il faudra préparer les nombres de manière qu'ils soient le plus près possible de la fin de la table. Ces considérations trouveront leur application dans ce qui suit.

§ 5. Usage des tables.

45. La première des trois parties dont nous avons successivement parlé est d'une application immédiate. La seconde, qui est la plus étendue, est celle dont on fait le plus d'usage. Occupons-nous-en d'abord.

Deux questions principales se présentent : *un nombre étant donné, trouver son logarithme*; réciproquement, *un logarithme étant donné, trouver le nombre qui lui correspond.*

Trouver le logarithme d'un nombre.

46. 1er Cas. *Le nombre a cinq chiffres.*

Exemple. Trouver le logarithme de 47529.

J'écris d'abord log 47529 = 4,

(La caractéristique est 4, parce que les plus hautes unités du nombre sont du cinquième ordre.)

J'ouvre la table et je parcours les indications de trois chiffres, placées en tête de chaque page hors du cadre, jusqu'à ce que je lise 475, ou le nombre qui en approche le plus, par défaut; je m'arrête ainsi à la page N 474.

D'après la disposition de la table, je prends les quatre premiers chiffres 4752 dans la *colonne* N, et le dernier, 9, dans la *ligne* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; je *lis* les trois premiers chiffres 676 de la partie décimale du logarithme, dans la première des deux parties de la colonne 0, et avant de rien écrire, je *lis* aussi les quatre derniers 9587; puis j'écris successivement, à la suite de la caractéristique 4, les trois chiffres 676, et à la suite les quatre chiffres 9587, en répétant posément et attentivement *l'énoncé* des deux nombres lus tout d'abord, ce qui me donne :

$$\log 47529 = 4,6769587.$$

Pour assurer la lecture du logarithme qu'on cherche, on peut mettre un doigt sous les dizaines 4752 du nombre, glisser horizontalement un autre doigt jusqu'au-dessous du chiffre 9 des unités, et lire posément : *Six cent soixante et seize; neuf mille cinq cent quatre-vingt-sept;* puis écrire ces deux nombres en chiffres, comme je l'ai dit, en répétant soigneusement l'énoncé.

La répétition de l'énoncé à l'instant d'écrire le logarithme, en s'arrangeant de manière que la main suive, pour ainsi dire, les mots que la bouche prononce, est en quelque sorte une preuve de l'opération. Il faut se garder surtout d'écrire aucun chiffre avant d'être bien sûr d'avoir retenu de mémoire

l'énoncé tout entier du nombre, dans la crainte de faire quelque méprise en retournant plusieurs fois à la table. Si l'on avait quelque doute sur l'exactitude de l'écriture du nombre, il faudrait le relire de nouveau tout entier, comme on l'a fait la première fois, et répéter de même, en suivant des yeux, les chiffres déjà écrits, en corrigeant au fur et à mesure ceux qui seraient faux. On acquerra d'autant plus de sûreté dans la pratique, que l'on mettra plus de *régularité* et *d'uniformité* dans la manière de se servir de la table.

D'après cela, on trouve le logarithme d'un nombre de cinq chiffres sans aucune difficulté :

Exemple I. $\log 47644 = 4,6780082.$

Exemple II. $\log 71615 = 4,8550040.$

47. 2e Cas. *Le nombre a cinq chiffres, soit avec des zéros à sa droite, soit avec une virgule décimale.*

Ce cas ne diffère du précédent qu'en ce que la caractéristique n'est plus 4; mais elle est immédiatement déterminée par l'ordre des plus hautes unités du nombre (**37**); quant à la partie décimale, elle se trouve dans la table, absolument comme si le nombre était entier, et que la caractéristique fût 4.

Exemple I. Trouver le logarithme de 716150000.

J'écris d'abord $\log 716150000 = 8,$

quant à la partie décimale, elle est la même que pour un nombre 10^4 fois plus petit, ou 71615, ce qui me fait retomber dans le premier cas, et j'ai

$$\log 716150000 = 8,8550040.$$

Exemple II. Trouver le logarithme de 71,615.

J'écris d'abord $\log 71,615 = 1,$

quant à la partie décimale, elle est la même que pour un nombre 10^3 fois plus grand, ou que pour 71615, et j'ai

$$\log 71,615 = 1,8550040.$$

Remarque. Pour trouver le logarithme d'un nombre de quatre chiffres supérieur à 1200 et inférieur à 10000, on écrit un 0 à sa droite, et l'on retombe dans le cas précédent.

48. 3e Cas. *Le nombre a cinq chiffres suivis d'une décimale.*

Exemple. Trouver le logarithme de 58922,7.

La partie entière étant composée de cinq chiffres, la caractéristique du logarithme cherché est 4; reste à en trouver la partie décimale. Le nombre proposé tombe entre les nombres de la table 58922 et 58923 qui diffèrent entre eux d'une unité; le logarithme du premier est 4,7702775; le logarithme du second est 4,7702849; la différence de ces logarithmes est 74 (dix-millionièmes); invoquant ici la proportionnalité reconnue au n° 44, je dirai :

Pour une unité de différence entre les nombres, j'ai 74 parties de différence entre les logarithmes; donc pour 0,7 de différence entre les nombres 58922 et 58922,7, j'aurai entre les logarithmes une différence égale aux 0,7 de 74 ou à 51; je dois donc ajouter 51 parties, ou plus exactement 52, au logarithme du plus petit nombre, ce qui me donne 4,7702827.

49. Abréviation. La petite table, dite *table des parties proportionnelles*, et que l'on voit inscrite dans la dernière colonne sous le nom de *dif* (différence), et à la page même où ont été pris les logarithmes précédents, porte en tête le nombre 74.

Ce nombre est précisément la différence des deux logarithmes consécutifs de la table qui comprennent le logarithme cherché. Cette différence, que l'on est ainsi dispensé de calculer, se nomme *différence tabulaire*. Il y a plus, on peut aussi se dispenser de multiplier la différence tabulaire par 0,7. A cet effet, la petite colonne qui se trouve à gauche dans la table des parties proportionnelles, renferme les nombres 1, 2, 3, ..., 9; l'autre colonne, à droite de la précédente, renferme les produits de la différence 74 par 1 dixième, 2 dixièmes, 3 dixièmes, ..., 9 dixièmes; ces produits sont exprimés à moins d'une demi-unité du septième ordre. D'après cela, il suffit de consulter cette table et de prendre à côté du chiffre 7 le produit 52, pour ensuite l'ajouter à la partie décimale 7702775 du logarithme de 58922, c'est-à-dire du nombre le plus voisin (en moins) du nombre proposé 58922,7.

Les opérations sont résumées ainsi qu'il suit :

	log 58922	7702775
pour	0,7	52
	log 58922,7 =	4,7702827

Pour abréger encore, j'écris d'abord

$$\log 58922{,}7 = 4,$$

un peu plus loin, j'écris à part 7702775, c'est-à-dire la partie décimale du logarithme de 58922; au-dessous de cette partie décimale, j'écris 52, qui exprime la différence correspondante à 7 *dixièmes;* je fais l'addition, en ayant soin d'écrire au fur et à mesure, à droite de la caractéristique 4, les chiffres provenant de cette addition. Voici alors la disposition du calcul:

$$\log 58922{,}7 = 4{,}7702827 \qquad \begin{array}{r} 7702775 \\ 52 \end{array}$$

Une dernière abréviation se présente : l'addition précédente laisse *presque toujours* intactes les trois premières décimales du logarithme cherché*; je les écris immédiatement à la droite de la caractéristique 4, et j'ai d'abord

$$\log 58922{,}7 = 4{,}770;$$

j'écris à part les quatre dernières décimales 2775 du logarithme de 58922, et au-dessous de cette partie décimale les 52 unités du septième ordre, qui correspondent aux sept dixièmes que renferme le nombre proposé; j'obtiens ainsi

$$\log 58922{,}7 = 4{,}770 \qquad \begin{array}{r} 2775 \\ 52 \end{array}$$

J'additionne les deux nombres mis à part en plaçant au fur et à mesure les chiffres de cette somme à droite des trois premières décimales déjà écrites à côté de la caractéristique, et j'ai finalement 4,7702827 pour le logarithme cherché.

Type du calcul.

$$\log 58922{,}7 = 4{,}7702827 \qquad \begin{array}{r} 2775 \\ 52 \end{array}$$

Remarque. Si je cherchais le logarithme de 58923,7, je trou-

---

* Log 963829 = 5,9840000 $\qquad \begin{array}{r} 9839959 \\ 41 \\ \hline 9840000 \end{array}$

Ce cas exceptionnel est fort rare.

verais 4,7702900, en ne faisant pas usage de la table des parties proportionnelles; dans le cas contraire, j'obtiendrais 4,7702901, c'est-à-dire un nombre un peu plus fort. Cela tient à ce que la différence des logarithmes tabulaires consécutifs 4,7702849 et 4,7702922, qui comprennent le logarithme cherché, n'est que de 73, tandis que, dans la petite table, elle est de 74.

50. 4e Cas. *Le nombre a cinq chiffres suivis de deux ou trois décimales.*

Exemple. Trouver le logarithme de 58922,79.

La partie décimale du logarithme de 58922 est 7702775; j'écris

$$\log 58922{,}79 = 4{,}770,$$

et plus loin 2775. Pour les 0,7, j'écris 52 au-dessous de 2775; quant aux 0,09, je dis: pour 0,9 de différence, je trouverais 67 dans la petite table; donc, pour une différence 0,09 qui est dix fois plus petite que 0,9, je dois prendre une différence dix fois plus petite, c'est-à-dire 6,7, dont la partie entière exprime des unités du septième ordre: j'aurai donc six unités du septième ordre à ajouter, en négligeant celles du huitième ordre; mais comme ici le chiffre des dixièmes dépasse 5, j'écris 6 + 1 ou 7 sous le chiffre 2; je fais la somme et j'obtiens 4,7702834 pour le logarithme cherché.

Type du calcul.

$\log 58922{,}79 = 4{,}7702834$	2775
	52
	7

Je suppose maintenant qu'il y ait plus de *deux* décimales dans le nombre dont on cherche le logarithme; pour la *première* décimale, j'écris toujours, comme ci-dessus, la différence correspondante que je trouve toute calculée dans la petite table; pour la *seconde* décimale du nombre, j'écris la différence correspondante trouvée dans la petite table en *avançant tous les chiffres d'un rang vers la droite*, afin de leur faire exprimer des parties dix fois plus petites; pour la *troisième* décimale, j'avance encore d'une place vers la droite tous les chif-

fres de la différence correspondante, et ainsi de suite. Je fais l'addition et je ne conserve dans la somme que les quatre premiers chiffres à gauche, en forçant, s'il y a lieu, le dernier de ces chiffres ; puis j'écris, comme à l'ordinaire, la somme ainsi tronquée, à la droite des trois décimales déjà placées à côté de la caractéristique.

EXEMPLE. log 34567,894 = 4,5386730.

```
6617
 101
  113
   50
------
672980
```

Dans la pratique, on peut se dispenser de faire l'addition à part, parce qu'on voit, à la seule inspection des nombres qui donneront dans la somme les chiffres à négliger, s'il y a lieu de forcer ou non le dernier chiffre conservé.

Quand il y a plus de deux décimales, il peut arriver que certains produits partiels n'aient aucune influence dans l'addition, *parce qu'ils sont trop avancés vers la droite;* on s'en aperçoit aisément, et l'on peut alors se dispenser de les écrire.

EXEMPLE. log 34567,8949 = 4,5386730.

```
6617
 101
  113
   50
   113
```

Cette disposition du calcul des parties proportionnelles peut aussi être adoptée, lorsqu'il n'y a que deux décimales dans le nombre donné.

51. 5e CAS. *Le nombre a sept ou huit chiffres avec des zéros à sa droite, ou une virgule décimale.*

EXEMPLE I. Trouver le logarithme de 5892279000.

J'écris la caractéristique 9, et j'opère comme si j'avais 58922,79 ; je trouve

log 5892279000 = 9,7702834

```
2775
  52
   67
```

EXEMPLE II. Trouver le logarithme de 3456789,4.

J'écris la caractéristique 6; j'opère comme si j'avais 34567,894, et je trouve

log 3456789,4 = 6,5386730 6617
101
113
50

Occupons-nous maintenant de la troisième partie de la table.

52. Si les six premiers chiffres à gauche d'un nombre dont on cherche le logarithme forment eux-mêmes un nombre compris entre 100000 et 108000, on peut se servir de la troisième partie de la table. On trouve alors, sans aucun calcul, les logarithmes des nombres de 6 chiffres, et, à l'aide des parties proportionnelles, les logarithmes des nombres de 7 chiffres ou plus.

Exemple I. log 1059,73 = 3,02519523.

Exemple II. log 1059,7348 = 3,02519720. 9523
164
328

L'étude des divers exemples qui précèdent conduit à la règle générale suivante :

53. Règle. *Pour trouver le logarithme d'un nombre donné, on écrit d'abord la caractéristique d'après l'ordre des plus hautes unités du nombre proposé. Si les* 6 *premiers chiffres à gauche font plus de* 108000, *on considère seulement le nombre formé par les* 5 *premiers; on en cherche le logarithme; on écrit à la droite de la caractéristique les* 3 *premières décimales du logarithme tabulaire, et les* 4 *autres à part; on cherche, à la gauche de la table des parties proportionnelles, le* 6e *chiffre du nombre donné; on écrit le nombre qui se trouve à côté, au-dessous des* 4 *décimales mises à part; on cherche de même, à la gauche de la petite table, le* 7e *chiffre du nombre donné, et l'on n'écrit à part que les* dizaines *du nombre correspondant, en le forçant s'il y a lieu; enfin, à la suite des* 3 *premières décimales isolées, on écrit la somme des* 3 *nombres mis à part.*

Si les 6 *premiers chiffres à gauche font moins de* 108000, *on a recours à la troisième partie de la table. Après avoir écrit la caractéristique, on cherche le logarithme du nombre formé par l'ensemble des* 6 *premiers chiffres à gauche; on écrit les* 4 *premiers*

chiffres à côté de la caractéristique, et les 4 autres à part; on place au-dessous de ces 4 chiffres le produit proportionnel au 7e chiffre du nombre, et les dizaines seulement du produit correspondant au huitième chiffre; on fait la somme des trois nombres mis à part pour l'écrire à la suite des 4 chiffres.

Remarque I. Si le nombre proposé renfermait plus de 7 chiffres dans le premier cas, ou plus de 8 dans le second, on pourrait multiplier la différence tabulaire la plus voisine par le nombre que forment les chiffres qui suivent, à partir de la gauche, le 5e ou le 6e chiffre du nombre proposé, après quoi on supprimerait à la droite du produit un pareil nombre de chiffres, pour avoir la différence à ajouter aux 4 chiffres mis à part.

On peut aussi, dans ce dernier cas, écrire successivement les produits partiels de la petite table correspondants aux 3 chiffres en excès, en ayant soin de reculer le 2e d'une place vers la droite, et le 3e de deux places. Le résultat est un peu moins sûr. Cela tient à ce que la proportionnalité sur laquelle on s'appuie n'est qu'approchée.

Remarque II. Quand il y a plus de 3 chiffres en excès, par rapport à la table, il est inutile de tenir compte du 4e et des suivants.

Trouver le nombre correspondant à un logarithme donné.

54. 1er Cas. *Trouver le nombre correspondant à un logarithme qui se trouve dans la table.*

Exemple. Trouver le nombre qui a pour logarithme 4,6774792.

Je cherche dans les tables, en dehors du cadre, l'indication L677, qui correspond aux 3 premières décimales du logarithme proposé; je ne la trouve pas, mais je trouve L675, qui est trop faible, et à la page suivante L681, qui est trop fort; à la page dont l'indication est L675, et parmi les nombres isolés de la colonne 0, je trouve 677; je cherche dans les nombres de 4 chiffres de la même colonne, et à partir de 677 en descendant, la deuxième partie décimale 4792 du logarithme donné; je trouve un nombre plus petit, 4244, et un nombre plus grand,

5157; d'après la disposition même de la table, le premier logarithme, 4,6774244, correspond à 47580, et le second, 4,6775157, correspond à 47590 : le nombre cherché tombe donc entre 47580 et 47590; ainsi, il se compose de 47580 et d'un nombre d'unités simples au plus égal à 9; d'ailleurs, d'après la disposition même de la table, les nombres qui ne diffèrent que par le chiffre des unités simples ont leurs logarithmes sur la même ligne; je cherche donc horizontalement, à partir de 4244, les 4 derniers chiffres du nombre proposé; je lis successivement : 4336, 4427,..., et, enfin, 4792 dans la colonne qui porte le chiffre 6 en tête; le nombre cherché est donc 47586; ce nombre s'obtient, comme on voit, en prenant les 4 premiers chiffres 4758 déjà trouvés dans la colonne N, avec le chiffre 6, qui est en tête de la colonne où l'on rencontre la seconde partie 4792 du logarithme proposé.

55. 2e Cas. *Trouver le nombre correspondant à un logarithme qui ne se trouve pas dans la table.*

Exemple I. Trouver le nombre qui a pour logarithme 4,7139649.

Je cherche ce logarithme comme s'il était dans la table, en me conformant à ce qui vient d'être dit dans le cas précédent. A la page qui porte l'indice L 712, je trouve d'abord, dans la première partie de la colonne 0, les 3 chiffres 713; dans la seconde partie de cette même colonne, je trouve 9104, qui est trop faible, et 9943, qui est trop fort; je cherche 9649 dans la ligne horizontale qui commence par 9104; je ne trouve pas ce nombre, mais je trouve 9607, qui est trop faible, et 9691, qui est trop fort : or, les logarithmes 4,7139607 et 4,7139691, qui comprennent entre eux le logarithme proposé 4,7139649, correspondent, l'un à 51756, et l'autre à 51757; le nombre cherché tombe donc entre ces deux derniers nombres.

Cela posé, la différence des logarithmes extrêmes est 84; la différence entre le premier de ces logarithmes et le logarithme donné est 42: or, ce rapport $\frac{42}{84}$ est $\frac{1}{2}$; donc, à cause de la proportionnalité admise, l'excès du nombre cherché sur le plus petit des deux nombres 51756 devra être la moitié de la différence entre les deux nombres extrêmes, c'est-à-dire la moitié de 1 ou $\frac{1}{2}$, ou mieux 0,5; j'ai ainsi 51756,5 pour le nombre cor-

respondant au logarithme proposé. La table des parties proportionnelles me donne immédiatement ces 0,5 additionnels. En effet, la petite table la plus voisine porte en tête la différence 84, qui répond à une différence d'une unité entre les nombres; je ne m'y arrête pas, et je cherche dans la colonne des produits proportionnels le nombre 42; je le trouve vis-à-vis de 5 : la différence 42 entre les logarithmes répond donc ici à une différence de 0,5 entre les nombres, ce qui me donne 51756,5, comme auparavant.

Exemple II. Trouver le nombre qui correspond au logarithme 4,7895634.

Ce logarithme tombe entre 4,7895596, qui correspond à 61597, et 4,7895666 qui correspond à 61598; d'une part, je retranche 5596 de 5634, et j'ai 38 unités du 7ᵉ ordre; d'autre part, je retranche 5596 de 5666, et j'ai 70 : cette différence correspond à la différence 1 entre les nombres. Si la différence entre le plus petit des logarithmes extrêmes et le logarithme proposé n'était que de 1 partie au lieu de 70, la différence entre le plus petit des logarithmes extrêmes et le nombre cherché ne serait que le 70ᵉ de 1, ou $\frac{1}{70}$; pour 2 parties, ce serait $\frac{2}{71}$; pour 3 parties, $\frac{3}{71}$, etc.; donc, pour les 38 parties de différence, ce sera $\frac{38}{70}$. Réduisant en décimales jusqu'aux *centièmes*, et pas au delà, vu que la proportionnalité admise n'est pas complétement rigoureuse, j'obtiens 0,54, et par suite 61597,54 pour le nombre correspondant au logarithme proposé.

Remarque. La différence entre deux logarithmes consécutifs n'est pas toujours celle de la petite table, ainsi que cela a eu lieu dans l'exemple I. Cela tient à ce que le plus petit des logarithmes peut être inscrit par excès, et le plus grand par défaut, et qu'en outre la différence tabulaire peut être forcée. Il y a plus : la différence entre le logarithme proposé et le logarithme qui en approche le plus par défaut, ne se trouve pas toujours juste parmi les produits de la table des parties proportionnelles. Ces deux circonstances se présentent dans l'exemple II quand on fait usage des parties proportionnelles. En effet, la différence tabulaire la plus voisine est 71, tandis que la différence des deux logarithmes consécutifs n'est que de 70. Je prends 71, qui, d'après la remarque précédente, doit inspirer plus de cou-

fiance; le nombre de la table le plus rapproché de 38 est 36, qui répond à 5 dixièmes; j'écris 5 à la droite du nombre trouvé, ce qui donne 61597,5; je retranche 36 de 38; le reste est 2. Pour avoir les centièmes du nombre cherché, je convertis le reste 2 en parties 10 fois plus petites, en mettant un 0 à sa droite, et j'ai 20: le nombre de la petite table qui diffère le moins de 20 est 21; ce nombre répond à 3 dixièmes; mais comme les parties de la différence des logarithmes sont 10 fois plus petites, les parties de la différence des nombres sont elles-mêmes 10 fois plus petites; elles devront donc exprimer des centièmes et non pas des dixièmes; j'écris 3 à la droite du chiffre des dixièmes, et j'ai finalement 61597,53 au lieu de 61597,54 comme auparavant.

Type du calcul.

$$\begin{array}{r} 4{,}7895634 = \log 61597{,}53 \\ 5596 \\ \hline 38 \\ 36 \\ \hline 20 \end{array}$$

Pour bien faire comprendre la marche et le progrès de l'opération précédente, je la détaille ainsi qu'il suit :

J'écris d'abord 4,7895634 = log;

puis je dis : *je trouve* 7895596 *qui répond à* 61597; j'écris 5596 au-dessous de 5634, et 61597 suivi d'une virgule à la suite du mot log; ce qui donne

$$\begin{array}{r} 4{,}7895634 = \log 61597, \\ 5596 \end{array}$$

en répétant soigneusement 5596 et 61597.

Je retranche 5596 de 5634; le reste est 38 :

$$\begin{array}{r} 4{,}7895634 = \log 61597 \\ 5596 \\ \hline 38 \end{array}$$

et je dis : *la différence la plus voisine est* 36 *pour* 5 *dixièmes;* j'écris 36 sous 38, et 5 à la droite de 61597 suivi d'une virgule, en répétant 36 pour 5 :

$$\begin{array}{r} 4{,}7895634 = \log 61597{,}5 \\ 5596 \\ \hline 38 \\ 36 \end{array}$$

Je soustrais 36 de 38, et j'ai 2 pour reste; je mets un 0 à la droite de 2, ce qui me donne 20, et je dis : *la différence la plus voisine de* 20 *est* 21 *pour* 3; j'écris 3 à la droite de 5 :

$$\begin{array}{r} 4{,}7895634 = \log 61597{,}53 \\ 5596 \\ \hline 38 \\ 36 \\ \hline 20 \end{array}$$

et le calcul est terminé.

Nous insisterons de nouveau sur la nécessité de toujours *lire* et *écrire* les logarithmes de la même manière, afin de *matérialiser* le plus possible l'opération.

Remarque I. Si dans le calcul précédent on avait besoin de 3 décimales au lieu de 2, il faudrait diviser la différence 38 par la différence tabulaire 71; on trouverait ainsi 61597,535. Mais la 3e décimale laisse en général de l'incertitude.

Voici d'autres exemples qui donnent lieu à quelques observations importantes.

Exemple I. Trouver le nombre qui a pour logarithme 4,7879997.

$$\begin{array}{r} 4{,}7879997 = \log 61376{,}15 \\ 9986 \\ \hline 11 \\ 7 \\ \hline 40 \end{array}$$

Parvenu au nombre de la table 9561, au lieu de trouver un

nombre plus fort au-dessous de ce dernier dans la colonne 0, comme dans les exemples précédents, je trouve un nombre plus faible, 0269, ce qui tient à ce que 0269 doit être considéré avec 788 au lieu de 787; dans ce cas, je suis la ligne qui commence à 9561, et j'arrive à 9986; les 4 chiffres de la colonne suivante sont 0057, qui doivent être comptés avec 788 au lieu de 787, et forment ainsi le logarithme immédiatement supérieur; puis le calcul s'achève comme précédemment.

Exemple II. Trouver le nombre qui a pour logarithme 4,7880033.

$$4{,}7880033 = \log 61376{,}65$$

$$\begin{array}{r} 79986 \\ \hline 47 \\ 43 \\ \hline 40 \end{array}$$

Ce cas est celui où l'on ne trouve pas, dans la table, les trois premiers chiffres du logarithme. En effet, le plus petit logarithme de la table qui commence par 788 est 7880057, nombre supérieur au logarithme proposé; il faut donc prendre le logarithme précédent, qui est le même que tout à l'heure. Ainsi, je prends les trois premiers chiffres avec une unité de moins, et le plus fort des nombres de quatre chiffres compris dans la ligne horizontale qui précède immédiatement 788; j'ai ainsi 7879986 pour le logarithme le plus approché par défaut, et le reste se termine comme à l'ordinaire, à cette exception près, qu'ici on écrit aussi le dernier des trois premiers chiffres de la partie décimale du logarithme le plus approché.

Jusqu'à présent, la caractéristique du logarithme donné a été de 4 unités. Voici des exemples où elle est plus grande ou plus petite.

Exemple I. Trouver le nombre qui a pour logarithme 6,7895634.

Je cherche le logarithme comme si la caractéristique était 4; je trouve

$$4{,}7895634 = \log 61597{,}53;$$

donc $$6{,}7895634 = \log 6159753.$$

Exemple II. Trouver le nombre qui a pour logarithme 10,7895634 ; je trouve 61597530000.

Exemple III. Trouver le nombre qui a pour logarithme 2,7895634. Le nombre correspondant à 4,7895634 est 61597,53; donc

$$2,7895634 = \log 615,9753.$$

Exemple IV. $0,7895634 = \log 6,159753.$

Remarque II. Par exception, l'emploi de la petite table pourrait donner exactement cette 3e décimale; mais lors même que l'on ne cherche que deux chiffres, la *division* ne donne pas toujours identiquement les deux mêmes décimales que la table. Cela tient à ce que les deux nombres tabulaires qui comprennent le logarithme proposé, peuvent être forcés dans le même sens ou en sens contraire. La même observation s'applique aux différences.

Remarque III. Quand les quatre premiers chiffres du logarithme donnent un nombre inférieur à 0334, auquel cas ce logarithme est inférieur à celui de 108000, on peut se servir de la dernière des trois parties de la table, soit que la partie décimale du logarithme proposé ait 8 chiffres, soit qu'elle n'en ait que 7; dans le dernier cas, on remplace la 8e décimale par un zéro. On a ainsi, dans le premier cas, l'avantage de trouver le nombre cherché avec 8 figures au lieu de 7; dans le second cas, c'est-à-dire si on a remplacé la 8e décimale par un zéro, il ne faut pas compter sur l'exactitude du 8e chiffre du nombre, car dire qu'un logarithme n'est connu qu'avec 7 décimales, cela ne signifie pas que la 8e décimale est un zéro, mais qu'elle est inconnue : ainsi le zéro par lequel on la remplace est un chiffre probablement faux, et, par suite, le 8e chiffre trouvé pour le nombre ne peut être juste que par hasard.

Les indications hors du cadre offrent 4 chiffres au lieu de 3; d'ailleurs, on opère de la même manière que dans les cas ordinaires et comme si la caractéristique était 5.

Voici quelques exemples.

Exemple I. Trouver le nombre qui a pour logarithme 4,02960696. (Rép. : 10705,5.)

Exemple II. Trouver le nombre qui a pour logarithme 4,02951848.

$$\begin{array}{r} 4{,}02951848 = \log 10703{,}319 \\ \underline{1770} \\ 78 \\ \underline{41} \\ 370 \end{array}$$

Exemple III. Trouver le nombre qui a pour logarithme 3,02960197.

$$\begin{array}{r} 3{,}02960197 = \log 1070{,}5377 \\ \underline{3{,}02959884} \\ 313 \\ \underline{284} \\ 290 \end{array}$$

Remarque IV. On a pu se demander de quelle utilité était la *barre verticale* qui se trouve placée entre la colonne 5 et la colonne 4. Cette barre a pour objet de faciliter la recherche du logarithme correspondant à un nombre donné, ou réciproquement. Cela tient à ce que l'on a 5 colonnes de nombres de 4 chiffres avant et après, de manière qu'avec un peu d'habitude on peut apprécier le rang de la colonne, et, par suite, le chiffre qui est soit en haut, soit en bas, et cela sans y regarder.

Remarque V. L'emploi des tables de logarithmes présente souvent de légères anomalies dont il ne faut point s'étonner. Pour s'en rendre compte, il faut concevoir que l'on ait d'abord trouvé les *logarithmes*, les *différences* et les *parties proportionnelles* avec un plus grand nombre de décimales; puis, qu'on a effacé toutes les décimales non écrites dans la table, en augmentant d'une unité la dernière décimale conservée, toutes les fois que la partie supprimée dépassait une demi-unité de cet ordre, ce qui peut altérer les différences ou les parties proportionnelles. Mais comme la loi générale de la table est la constance de la différence entre les logarithmes pour des nombres équidifférents, peu différents les uns des autres, d'où

résulte la proportionnalité approchée; il vaut mieux, dans l'emploi des parties proportionnelles, s'en rapporter aux lois générales de la table qu'à une irrégularité accidentelle dont je viens de faire connaître l'origine. Ces anomalies peuvent, par exemple, être assez sensibles lorsqu'on cherche le logarithme d'un nombre dans les premières pages qui suivent immédiatement la Chiliade I, à cause de la confusion apparente des petites tables proportionnelles.

Je terminerai la solution du problème inverse par l'énoncé de la règle générale suivante :

56. Règle. *Pour trouver le nombre correspondant à un logarithme donné : après avoir écrit ce logarithme, on met à la suite le signe = suivi de l'initiale log ; on cherche, dans la seconde partie de la table, le logarithme qui approche le plus par défaut du logarithme proposé; on écrit les 4 derniers chiffres du logarithme tabulaire au-dessous des 4 derniers chiffres du logarithme proposé; à la droite du mot log, on écrit le nombre entier de 5 chiffres correspondant au logarithme tabulaire; on soustrait le nombre de 4 chiffres inscrits sous le logarithme proposé, du nombre formé par les 4 chiffres qui se trouvent au-dessus ; dans la table des parties proportionnelles la plus voisine, on cherche dans la colonne à droite le nombre qui approche le plus, par défaut, du reste de la soustraction; on écrit ce nombre sous le reste, et le chiffre qui y correspond à la suite des 5 chiffres déjà écrits après le mot log; on retranche du reste précédent le nombre mis au-dessous; on met un 0 à la droite du nouveau reste, et on le cherche encore par défaut dans la table des parties proportionnelles; on écrit le chiffre correspondant à la suite de six autres; enfin, on place une virgule dans le nombre trouvé, ou bien des zéros à sa droite, de manière que les plus hautes unités du nombre obtenu soient d'un ordre correspondant à la caractéristique, c'est-à-dire que le rang de ses plus hautes unités par rapport au chiffre des unités simples, sera marqué par le nombre d'unités de la caractéristique, à gauche si la caractéristique est positive, à droite si elle est négative.*

Si la partie décimale du logarithme proposé est inférieure à 03342376 (*qui est le logarithme de* 108000, *abstraction faite de la caractéristique*), *on se servira de la troisième partie de la table,*

comme de la seconde, en mettant, s'il le faut, un 0 à la droite du logarithme donné, pour qu'il ait 8 chiffres.

Si l'on voulait trouver dans le premier cas plus de 7 chiffres, dans le second plus de 8 chiffres; après avoir mis trois zéros à la droite du 1er reste, on *diviserait* par la différence tabulaire la plus voisine, et l'on écrirait les 3 chiffres obtenus au quotient à la suite du nombre déjà écrit après le mot log; mais on ne peut compter sur l'exactitude du 3e que lorsque le 1er chiffre du nombre est fort petit, comme je l'ai dit n° 52; à plus forte raison, on ne peut compter sur l'exactitude du 4e chiffre, qu'on obtiendrait en mettant un zéro de plus au dividende.

Occupons-nous maintenant des applications de ce qui précède.

§ 6. Éléments du calcul logarithmique.

57. Multiplier 3,1416 par 27,985.

Je cherche dans la table le logarithme de 3,1416, je trouve 0,4971509; je cherche le logarithme de 27,985, je trouve 1,4469253; je fais la somme 1,9440762 de ces deux logarithmes, et j'ai le logarithme du produit. Mais, lorsqu'on connaît le logarithme d'un nombre, la table donne ce nombre; je cherche donc le nombre correspondant, et j'obtiens 87,91766 pour le produit demandé.

Type du calcul.

$$\begin{aligned} \log 3{,}1416 &= 0{,}4971509 \\ \log 27{,}985 &= \underline{1{,}4469253} \\ \log \text{ prod.} &= 1{,}9440762 = \log 87{,}91766 \end{aligned}$$

58. Diviser 27,985 par 3,1416.

$$\begin{aligned} \log 27{,}985 &= 1{,}4469253 \\ \log 3{,}1416 &= \underline{0{,}4971509} \\ \log \text{ quot.} &= 0{,}9497744 = \log 8{,}90788. \end{aligned}$$

J'ai cherché le logarithme du dividende, celui du diviseur, j'ai retranché le second du premier, et j'ai obtenu 0,9497744 pour le logarithme du quotient; j'ai cherché le nombre correspondant, et j'ai obtenu 8,90788 pour le quotient demandé.

59. Élever 3,1416 à la 7e puissance.

$$\log 3{,}1416 = 0{,}4971509$$
$$\log \text{puiss.} = 3{,}4800563 = \log 3020{,}342.$$

J'ai cherché le logarithme du nombre, je l'ai multiplié par 7, et j'ai eu 3,4800563 pour le logarithme de la puissance; puis le retour au nombre m'a donné 3020,342 pour le résultat cherché.

60. Extraire la racine cinquième de 3,1416.

$$\log 3{,}1416 = 0{,}4971509$$
$$\log \text{rac.} = 0{,}0994302 = \log 1{,}257274.$$

J'ai pris le cinquième du logarithme du nombre; j'ai eu 0,0994302, et le retour au nombre m'a donné 1,257274 pour la racine demandée.

61. Remarque. Pour que les calculs précédents puissent s'effectuer, il y a des conditions à remplir:

Premièrement : Les nombres sur lesquels on opère doivent être plus grands que 1; autrement, ils n'auraient point de logarithme, puisque la progression géométrique croissante commence par l'unité, et ne peut, par conséquent, renfermer des nombres plus petits que l'unité.

Secondement : Il faut qu'on puisse faire toutes les soustractions qui se présentent; sans cela, on ne pourrait pas faire par logarithmes toutes les divisions indiquées.

Il s'agit donc de voir, en premier lieu, comment on pourra appliquer les logarithmes dans le cas des nombres plus petits que l'unité, et, en second lieu, comment on pourra suppléer à l'impossibilité de faire naturellement certaine soustraction.

§ 7. Manière d'appliquer le calcul logarithmique aux nombres plus petits que l'unité.

62. Ainsi que nous venons de le dire, un nombre plus petit que l'unité n'a pas de logarithme; mais, si on le multiplie par un facteur connu suffisamment grand, on pourra avoir un produit plus grand que l'unité qui, par conséquent, aura un logarithme. Le plus simple est de le multiplier par 10, 100, 1000, etc.;

on prendra le logarithme du produit, et en introduisant dans le calcul ce logarithme, comme il appartiendra à un nombre 10, 100, 1000 fois trop grand, on aura un résultat affecté d'une erreur facile à apprécier, et, par suite, facile à rectifier.

Exemple I. Soit le nombre 0,96205.

Je le multiplie par 10, et j'ai 9,6205, nombre qui a pour logarithme 0,9831976; mais ce logarithme est celui d'un nombre 10 fois plus grand que le proposé.

Exemple II. Soit le nombre 0,096205.

Je le multiplie par 100, et je trouve log 9,6205 = 0,9831976; mais ce logarithme est celui d'un nombre 100 fois plus grand, et ainsi des autres exemples.

63. Si l'on suivait cette marche, très-simple il est vrai, le nombre correspondant au logarithme obtenu serait, tantôt 10 fois trop grand, tantôt 100 fois, tantôt 1000 fois, etc. Pour éviter cette diversité pénible pour la mémoire, *on rend toujours le nombre* 10^{10} *fois plus grand*, ce qui suffit dans la pratique. Reprenons sous ce point de vue les nombres précédents :

1° Soit 0,96205. Si d'abord je rends ce nombre seulement 10 fois plus grand, j'ai pour logarithme 0,9831976; mais pour le rendre 10^{10} fois plus grand, il faut, après l'avoir rendu 10 fois plus grand, le rendre encore 10^{9} fois plus grand, ce qui fait augmenter le logarithme précédent de 9 unités; j'ai donc 9,9831976 pour le logarithme du nombre proposé multiplié par 10^{10}.

2° Soit 0,096205. Je le rends d'abord 100 fois plus grand, et j'ai log 9,6205 = 0,9831976; mais il faut encore multiplier le nombre proposé par 10^{8}, ou ajouter 8 au logarithme précédent; j'ai alors 8,9831976 pour le logarithme du nombre multiplié par 10^{10}. De même, si je partais du nombre 0,0096205, je le rendrais d'abord 1000 fois plus grand, et comme, pour qu'il fût multiplié par 10^{10}, il resterait encore à la rendre 10^{7} fois plus grand, la caractéristique deviendrait 7, auquel cas le logarithme serait 7,9831976, et ainsi de suite.

64. On devra se rappeler par un signe particulier que le logarithme écrit est celui d'un nombre 10^{10} fois plus grand que le nombre proposé. On peut, par exemple, indiquer cette circon-

stance par un *accent* placé un peu au-dessus du mot log, et écrire :

$$9{,}9831976 = \log' 0{,}96205$$
$$8{,}9831976 = \log' 0{,}096205$$
$$7{,}9831976 = \log' 0{,}0096205$$
etc. etc.

Ainsi la notation log' nous servira dorénavant à indiquer que l'on a le logarithme d'un nombre 10^{10} fois plus grand que le nombre proposé*.

Remarquons que la caractéristique de ces sortes de logarithme est l'excès de 10 sur le nombre qui exprime le rang de la première décimale à gauche dans le nombre proposé, à partir de la virgule, et que la partie décimale s'obtient comme si la partie entière du nombre proposé rentrait dans les limites des tables.

Soit le nombre 0,0009869638.

La caractéristique est 6 ; je cherche la partie décimale comme si ce nombre était 98696,38, et je trouve 9943012, en sorte que $6{,}9943012 = \log' 0{,}0009869638$.

65. Réciproquement, pour revenir d'un semblable logarithme au nombre, il faudrait faire le retour comme à l'ordinaire, et diviser ensuite par 10^{10}; mais, à cause de la grandeur de la caractéristique, on aurait, en général, un assez grand nombre de zéros à la droite du nombre trouvé, et il faudrait ensuite mettre une virgule convenablement placée pour diviser par 10^{10}.

66. Pour simplifier, on *supprime d'abord la caractéristique*; si elle est 9, cette suppression dans le logarithme revient à diviser le nombre correspondant par 10^9, et alors il ne reste plus qu'à le diviser par 10. Si la caractéristique est 8, on n'a plus qu'à diviser par 100 après le retour au nombre ; si elle est 7, on n'a plus qu'à diviser par 1000, et ainsi de suite. *En général, on supprime la caractéristique, puis, après le retour au nombre, on divise par une puissance de* 10 *d'un degré marqué par l'excès de* 10 *sur la caractéristique du logarithme que l'on considère.*

---

* Cette précaution pourrait encore être exprimée en plaçant un *point* au lieu d'une virgule entre la caractéristique et le chiffre des dixièmes.

Exemple. Soit 7,9831976.

J'ôte 7, et j'ai 0,9831976; je cherche le nombre correspondant et je trouve 9,6205; enfin, je divise par 1000, et j'ai 0,0096205 pour le nombre cherché; ainsi

$$7,9831976 = \log' 0,0096205.$$

En résumé, l'introduction dans le calcul du log' revient toujours à opérer sur des nombres 10^{10} fois plus grands, ce qui exige une correction très-simple dans le résultat.

Voyons maintenant comment on peut suppléer à l'impossibilité de certaines soustractions.

67. Soit à chercher, par exemple, le quotient de la division de 348 par 56927.

Le logarithme de 348 est 2,5415792, celui de 56927 est 4,7553183; on ne peut évidemment soustraire le second logarithme du premier; en multipliant le dividende 348 par une puissance de 10, on peut le rendre plus grand que le diviseur: ici, il suffirait de le multiplier par 1000; mais, pour opérer d'une manière régulière et uniforme, on le multiplie par 10^{10}, ce qui revient à ajouter 10 au logarithme du dividende; reste à faire la soustraction des logarithmes, à revenir au nombre, et à diviser le résultat par 10^{10}.

Voici le calcul :

348 : 56927.

$$\begin{array}{r} \log 348 = 2,5415792 \\ \log 56927 = 4,7553183 \\ \hline 7,7862609 = \log' 0,006113090 \end{array}$$

Ainsi, le quotient cherché est 0,006113090.

68. Ce calcul peut encore être fait ainsi qu'il suit :

Après avoir ajouté dix unités au logarithme supérieur 2,5415792, on peut d'abord ne faire porter la soustraction que sur l'une des parties 10 de cette somme.

J'effectue cette soustraction d'après la règle du n° **211** de nos *Eléments d'Arithmétique :*

$$\begin{array}{r} 10 \\ 4,7553183 \\ \hline 5,2446817 \end{array}$$

et j'ai 5,2446817; puis, pour avoir le reste total, j'ajoute au nombre précédent la partie 2,5415792 à laquelle je n'ai pas touché :

$$\begin{array}{r} 5,2446817 \\ 2,5415792 \\ \hline 7,7862609 \end{array}$$

j'obtiens 7,7862609 comme dans le premier calcul, en sorte que j'achèverais l'opération de la même manière.

69. Le nombre 5,2446817, excès de 10 sur 4,7553183, logarithme de 56927, a reçu le nom de *complément arithmétique* du logarithme de 56927. En général, *le complément arithmétique du logarithme d'un nombre est le résultat que l'on obtient quand on retranche ce logarithme de dix unités.*

Pour abréger, on écrit le mot complément c^t. D'après cela,

$$c^t \log 56927 = 5,2446817.$$

(Il importe de s'exercer à prendre à vue le c^t du logarithme d'un nombre.)

Remarque. Bien que la soustraction soit un calcul très-simple, on s'y trompe plus facilement que dans une addition; aussi préfère-t-on, même dans les *soustractions possibles*, recourir à l'emploi des compléments, pour remplacer la soustraction par une addition. A la vérité, il y a une soustraction déguisée dans le complément même, mais elle est tellement simple, qu'on ne la compte pas pour une opération.

§ 8. Usage des compléments dans le calcul logarithmique.

70. L'opération qui a été faite au n° 68, et que je résume dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{l|r} 348 : 56927. & \log 348 = 2,5415792 \\ & c^t \log 56927 = 5,2446817 \\ \hline & 7,7862609 = \log' 0,006113098 \end{array}$$

revient à ajouter au logarithme du dividende le c^t du logarithme du diviseur : le résultat est alors 10^{10} fois plus grand, ce qui n'empêche pas, comme on l'a vu, de revenir au nombre

qui exprime le quotient de la division proposée. Ainsi, *la considération des compléments remplace la soustraction par une addition toujours possible.*

Nous pouvons donc poser la règle suivante :

71. Règle. *Pour faire une division dans laquelle le dividende est plus petit que le diviseur, on ajoute au logarithme du dividende le complément arithmétique du logarithme du diviseur ; on retranche de la caractéristique le plus grand nombre d'unités possible ; puis, après le retour au nombre, on divise le nombre trouvé par une puissance de* 10, *dont le degré est marqué par l'excès de* 10 *sur le nombre d'unités retranchées.*

72. On peut appliquer la même méthode aux soustractions possibles.

Exemple I. Diviser 56927 par 348.

Type du calcul.

$$\begin{array}{rl} \log 56927 = & 4,7553183 \\ c^{t} \log 348 = & 7,4584208 \\ \hline & 12,2137391 = \log 163,5833 \end{array}$$

Dans ce cas, le retour au nombre a été plus facile, car au lieu de ne diviser par 10^{10} qu'après ce retour au nombre, on a pu supprimer immédiatement une dizaine à la caractéristique, avant de recourir à la table, et c'est pour cela qu'on a barré le chiffre des dizaines.

73. On peut aussi appliquer cette méthode au cas où le diviseur est plus petit que l'unité.

Soit à diviser 348 par 0,031416.

Je trouve successivement :

$$\log 348 = 2,5415792 ; \quad \log' 0,031416 = 8,4971509 ;$$
$$c^{t} \log' 0,031416 \quad = 1,5028491 ;$$

j'ajoute ce dernier nombre à log 348, et j'obtiens

$$4,0444283.$$

Si je divisais par le nombre dont le logarithme est 8,4971509, comme ce nombre est 10^{10} fois plus grand que le diviseur pro-

posé, je n'aurais pas le quotient cherché, mais un autre quotient 10^{10} fois *plus petit;* en ajoutant le c^t de ce logarithme au logarithme du dividende, j'ai une somme de logarithmes qui répond à un nombre 10^{10} fois *plus grand* que cet autre quotient, et, par conséquent, égal au quotient cherché; donc, dans ce cas, il y a *compensation*, et je peux revenir au nombre sans aucune attention particulière.

Type du calcul.

348 : 0,031416. $\log 348 = 2,5415792$

$c^t \log' 0,031416 = 1,5028491$

$4,0444283 = \log 11077,156$

74. Si le dividende était lui-même plus petit que l'unité, le logarithme que l'on trouverait à l'aide de l'artifice du n° **64** répondrait à un nombre 10^{10} fois plus grand que le nombre proposé, et le quotient serait lui-même 10^{10} fois trop grand : dès lors, il faudrait avoir égard à cette circonstance dans le retour au nombre, conformément à ce qui a été dit au n° **66**; mais cette correction serait, comme on le voit, étrangère à l'emploi des compléments.

Type du calcul.

Exemple I. 0,000348 : 0,031416.

$\log' 0,000348 = 6,5415792$

$c^t \log' 0,031416 = 1,5028491$

$8,0444283 = \log' 0,011077156$

Exemple II. 0,348 : 0,031416.

$\log' 0,348 = 9,5415792$

$c^t \log' 0,031416 = 1,5028491$

$1,0444283 = \log' 11,077156$

75. Il nous reste à parler des puissances et des racines (opérations plus faciles que la division).

Exemple. Élever le nombre 0,0348 à la troisième puissance. Je trouve $\log' 0,0348 = 8,54157924$; je triple ce logarithme et j'ai 25,62473772; comme le logarithme triplé est le logarithme

du nombre proposé, multiplié par 10^{10}, le triple de ce logarithme répond au cube du nombre proposé, multiplié par le cube de 10^{10}, c'est-à-dire par 10^{30}; mais si je supprime les deux dizaines de la caractéristique 25, cette suppression dans le logarithme correspondra à la division du nombre par 10^{20}; il ne restera plus qu'à diviser par 10^{10}, ce qui fait rentrer le logarithme obtenu dans la classe des log'. En revenant au nombre, on trouve 0,00004214419.

Type du calcul.

$(0,0348)^3$ $\log' 0,0348 = 8,54157924$
$3 \log' 0,0348 = 25,62473772 = \log' 0,00004214419$

76. Extraire la racine cinquième de 0,0348.

J'ai d'abord $\log' 0,0348 = 8,54151924$. Ce logarithme répond à un nombre 10^{10} fois trop grand; j'ajoute par la pensée 40 à la caractéristique, afin que le logarithme réponde au nombre proposé multiplié par une puissance de 10 dont le degré soit multiple de 5, c'est-à-dire par 10^{50} dans l'exemple actuel; prenant le 5e, je trouve 9,70830385, qui répond à la racine 5e du produit du nombre par 10^{50}; cette racine sera le produit de la racine 5e du nombre par la racine 5e de 10^{50}, c'est-à-dire par 10^{10}. Comme ce logarithme est le logarithme du nombre cherché multiplié par 10^{10}, je reviendrai au nombre d'après la méthode indiquée au n° 66, ce qui donne 0,510874 pour le résultat cherché.

Type du calcul.

$\sqrt[5]{0,0348}$ $\log' 0,0348 = 8,54151924$
$9,70830385 = \log' 0,5108622$

77. Pour abréger le discours, on dit souvent qu'on a mis 10, ou une dizaine de trop dans l'ensemble des logarithmes, au lieu de dire que le résultat se trouve multiplié par 10^{10}.

On dit aussi qu'un logarithme a été augmenté de 10 unités, quand bien même ce logarithme n'existerait pas sans la modification introduite, puisqu'il devrait répondre à un nombre plus petit que 1 qui ne saurait avoir de logarithme; mais c'est ici une locution prise pour une autre, et il faut se souvenir que cela signifie qu'on a multiplié le nombre par 10^{10}.

78. Lorsque, d'après le *tableau des calculs* à faire sur des nombres donnés, mais combinés seulement par multiplication, division, élévation aux puissances et extraction de racines, sans additions ni soustractions indiquées, on est conduit à enchaîner les diverses opérations logarithmiques que nous venons d'expliquer, la marche à suivre est la même : pour chacune d'elles on les applique successivement selon les opérations indiquées, de manière qu'en général on peut faire succéder les opérations par logarithme les unes aux autres et *dans une même colonne.*

Il est alors facile de distinguer par quelle puissance de 10 le résultat doit être divisé, ou, pour abréger le langage, combien on a mis de dizaines de trop dans la somme des logarithmes.

Dans tous les cas, après chaque addition on supprimera ces dizaines dans la caractéristique; après cette suppression, elle deviendra exacte, à moins qu'il ne reste encore une dizaine de trop au résultat. Dans ce dernier cas, la somme trouvée répondra à un nombre 10^{10} fois plus grand, et le retour au nombre sera facile s'il y a lieu de le faire.

Pour distinguer ces deux cas, il suffira d'examiner si les dizaines de la caractéristique sont en nombre égal au nombre des dizaines introduites dans le courant du calcul, ou en nombre moindre. Dans ce dernier cas, la différence n'est jamais que d'une dizaine, car une dizaine de différence en plus ou en moins répondrait à un nombre 10^{10} fois, ou 10 billions de fois plus grand ou plus petit, ce qui le ferait sortir des limites naturelles des opérations pratiques.

On voit par là que cette méthode des compléments ne peut jamais amener d'erreurs graves, car elles seraient trop considérables pour être admises; un simple coup d'œil jeté sur le calcul ferait toujours apercevoir la cause de ces erreurs.

79. Lorsqu'une extraction de racine se présentera, on devra distinguer deux cas : 1° si le logarithme jusque-là est exact, on le divisera simplement par l'indice de la racine; 2° lorsqu'il sera trop fort de 10, on rendra le nombre de dizaines en excès multiple de l'indice, en ajoutant un nombre de dizaines convenable qui sera nécessairement marqué par l'indice diminué de un; puis, après la division par l'indice, le logarithme renfer-

mera seulement une dizaine de trop, ou plus exactement, répondra à un nombre 10^{10} fois plus grand.

80. Si l'on avait directement à considérer une fraction à deux termes, on la regarderait comme le quotient de la division du numérateur par le dénominateur, et, suivant qu'elle serait plus grande ou plus petite que l'unité, on trouverait le logarithme de la fraction, ou celui du produit de la fraction par 10^{10}.

81. Si dans ce dernier cas il fallait soumettre ce logarithme à des calculs ultérieurs, on opérerait comme on l'a fait pour les logarithmes des fractions décimales proprement dites. Mais, en général, quand les fractions entrent dans un tableau d'opérations à faire, il vaut mieux rapporter le calcul logarithmique au tableau d'opérations qui résulteraient de l'application des règles du calcul des fractions, règles qui ramènent toujours à des opérations à effectuer sur les deux termes de chacune d'elles.

82. Le calcul logarithmique ne peut pas se faire en une seule fois lorsqu'il y a plusieurs radicaux différents dans l'expression proposée, et aussi lorsqu'il y a des nombres fractionnaires ou irrationnels, combinés par addition ou soustraction. Dans le premier cas, on est obligé de calculer à part les logarithmes de certains radicaux; dans le deuxième cas, on est même obligé de faire partiellement le retour aux nombres pour effectuer les additions ou soustractions et de reprendre ensuite de nouveau les logarithmes des sommes ou des différences pour les introduire dans la *colonne principale*.

Pour rendre plus clair ce qui précède, nous allons traiter divers exemples qui serviront de types dans ces sortes de calculs.

§ 9. Types logarithmiques.

83. Exemple I. Calculer l'expression

$$x = 184,56 \times 564000 \times 0,94 \times 0,0002564.$$

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 184,56 &= 2,2661376 \\
\log 564000 &= 5,7512791 \\
\log' 0,94 &= 9,9731279 \\
\log' 0,0002564 &= 6,4089180 \\
\hline
\log x &= 24,3994626 = \log 25087,80
\end{aligned}$$

Il y a dans cet exemple deux log' qui donnent deux dizaines de trop; en les barrant, on n'a plus d'erreur, et l'on peut revenir au nombre immédiatement.

Exemple II. Calculer l'expression

$$x = \frac{0,94 \times 0,0002564 \times 0,72}{184,56 \times 0,0057}.$$

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log' 0,94 &= 9,9731279 \\
\log' 0,0002564 &= 6,4089180 \\
\log' 0,72 &= 9,8573325 \\
\text{c}^t \log 184,56 &= 7,7338624 \\
\text{c}^t \log' 0,0057 &= 2,2441251 \\
\hline
\log' x &= 36,2173659 = \log' 0,0001649551
\end{aligned}$$

Dans cet exemple, les trois log' donnent 30 de trop; le c^t log donne 10 de trop, ce qui fait 40; le c^t log' n'introduit aucune erreur : en supprimant les 3 dizaines de la caractéristique, il y a encore 10 de trop; le résultat final est donc un log', et l'on doit revenir au nombre d'après la règle du n° 66.

Exemple III. Calculer l'expression $x = \frac{0,157}{2,348} \times \frac{8,93}{0,00913}$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log' 0,157 &= 9,1958997 \\
\log 8,93 &= 0,9508515 \\
\text{c}^t \log 2,348 &= 9,6293019 \\
\text{c}^t \log' 0,00913 &= 2,0395292 \\
\hline
\log x &= 21,8155823 = \log 65,40068
\end{aligned}$$

J'ai opéré comme si dans les indications j'avais d'abord appliqué la règle de la multiplication des fractions, ce qui donne l'expression $x = \frac{0,157 \times 8,93}{2,348 \times 0,00913}$.

Exemple IV. Calculer l'expression $x = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times 0,157}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{8} \times 0,00913}$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,3010300 \\
\log 4 &= 0,6020600 \\
\log' 0,157 &= 9,1958996 \\
\log 4 &= 0,6020600 \\
\log 8 &= 0,9030900 \\
c^t \log 3 &= 9,5228788 \\
c^t \log 5 &= 9,3010300 \\
c^t \log 3 &= 9,5228788 \\
c^t \log 7 &= 9,1549020 \\
c^t \log' 0,00913 &= 2,0395292 \\
\log x &= 51,1453584 = \log 13,97521
\end{aligned}$$

Le calcul est fait comme si j'avais transformé les indications d'opérations sur les fractions en indications d'opérations sur les deux termes de chacune d'elles.

Exemple V. Calculer l'expression $x = (\frac{2}{13})^5$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,30103000 \\
4 \log 2 &= 1,20412000 \\
c^t \log 13 &= 8,88605665 \\
4\, c^t \log 13 &= 35,54422660 \\
\log' x &= 45,93543325 = \log' 0,0000861853
\end{aligned}$$

Pour éviter de faire des opérations à part, j'ai opéré comme si j'avais 2×2^4 au lieu de 2^5, et 13×13^4 au lieu de 13^5; à cause des compléments, il y a 5 dizaines de trop dans la somme des logarithmes, et, comme j'en ai supprimé 4, il en est resté une de trop; j'ai donc dû revenir au nombre d'après la règle relative au log'.

Exemple VI. Calculer l'expression $x = \sqrt[3]{\frac{2}{13}}$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \text{c}^{\text{t}} \log 13 &= \underline{8{,}8860567} \\ & 9{,}1870867 \\ \log' x &= 9{,}7290289 = \log' 0{,}5358323 \end{aligned}$$

L'addition de log 2 et de c^{t} log 13 donne une somme trop forte de *une* dizaine; je prends le tiers en ajoutant encore *deux* dizaines, c'est-à-dire que j'opère comme si la caractéristique était 29 au lieu de 9 : le résultat est trop fort de 10 seulement, et je reviens au logarithme par la règle du log'.

Exemple VII. Calculer l'expression $x = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{13}\right)^5}$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30103000 \\ 4 \log 2 &= 1{,}20412000 \\ \text{c}^{\text{t}} \log 13 &= 8{,}88605665 \\ 4\, \text{c}^{\text{t}} \log 13 &= \underline{35{,}54422660} \\ & \underline{k5{,}93543325} \\ & 2 \\ \log' x &= 8{,}64514441 = \log' 0{,}04417173 \end{aligned}$$

Après l'addition, la somme est trop forte de 5 dizaines; après la suppression de la caractéristique 4, elle est encore trop forte de 1 dizaine; j'y ajoute par la pensée 2 dizaines; je prends le tiers comme si la caractéristique était 25, et le résultat est un log'.

Exemple VIII. Calculer l'expression $x = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{13}}\right)^5$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30103000 \\ \text{c}^{\text{t}} \log 13 &= \underline{8{,}88605665} \\ & 9{,}18708665 \\ & 9{,}72902888 \\ \log' x &= k8{,}64514440 = \log' 0{,}04417173 \end{aligned}$$

Après avoir fait, comme dans l'exemple VI, les opérations

relatives à la racine cubique de $\frac{2}{13}$, j'ai multiplié par 5; le résultat a été trop fort de 5 dizaines; j'en ai supprimé 4, et je n'ai plus eu qu'un log'.

L'erreur commise dans les premières opérations devant être répétée cinq fois, j'ai eu la précaution de prendre d'abord huit décimales, afin d'en avoir sept exactes dans le résultat.

Exemple IX. Calculer l'expression

$$x = \sqrt[7]{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times 28 \times 0{,}00037}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{8} \times 37485 \times 0{,}0029}}.$$

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\text{c}^{\text{t}} \log 3 &= 9{,}5228787 \\
\log 4 &= 0{,}6020600 \\
\text{c}^{\text{t}} \log 5 &= 9{,}3010300 \\
\log 28 &= 1{,}4471580 \\
\log' 0{,}00037 &= 6{,}5682017 \\
\text{c}^{\text{t}} \log 3 &= 9{,}5228787 \\
\log 4 &= 0{,}6020600 \\
\text{c}^{\text{t}} \log 7 &= 9{,}1549020 \\
\log 8 &= 0{,}9030900 \\
\text{c}^{\text{t}} \log 37485 &= 5{,}4261425 \\
\text{c}^{\text{t}} \log' 0{,}0029 &= 2{,}5376020 \\
\hline
& \ 55{,}8890336 \\
\log' x &= 9{,}4127191 = \log' 0{,}2586539
\end{aligned}$$

Dans cet exemple il y a cinq compléments et un log', ce qui a donné 6 dizaines de trop; j'ai retranché les 5 dizaines, et il n'en est resté qu'une de trop; pour prendre le septième, j'ai opéré avec 6 dizaines de plus à la caractéristique, ce qui la supposait de 65 unités; le résultat a été trop fort de 10, ce qui a donné un log'.

Exemple X. Calculer l'expression

$$x = \sqrt[5]{\frac{\left(\frac{200}{435}\right)^3 \times \left(\frac{32000}{43785}\right)^4 \times \frac{427}{827}}{82{,}5 \times (0{,}0025)^2 \times (0{,}00073)^3}}.$$

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 200 &= 2{,}30103000 \\
2 \log 200 &= 4{,}60206000 \\
\text{c}^{\text{t}} \log 435 &= 7{,}36151074 \\
2\, \text{c}^{\text{t}} \log 435 &= 14{,}72302148 \\
\log 32000 &= 4{,}50514998 \\
3 \log 32000 &= 13{,}51544994 \\
\text{c}^{\text{t}} \log 43785 &= 5{,}35867460 \\
3\, \text{c}^{\text{t}} \log 43785 &= 16{,}07602380 \\
\log 427 &= 2{,}63042788 \\
\text{c}^{\text{t}} \log 827 &= 7{,}08249449 \\
\text{c}^{\text{t}} \log 82{,}5 &= 8{,}08354605 \\
\text{c}^{\text{t}} \log' 0{,}0025 &= 2{,}60205999 \\
\text{c}^{\text{t}} \log' 0{,}0025 &= 2{,}60205999 \\
\text{c}^{\text{t}} \log' 0{,}00073 &= 3{,}13667714 \\
2\, \text{c}^{\text{t}} \log' 0{,}00073 &= 6{,}27335428 \\
\hline
& 10{,}85354036 \\
\log x &= 2{,}17070807 = \log 148{,}1522
\end{aligned}$$

Exemple XI. Calculer l'expression $x = \sqrt[3]{0{,}03 + \sqrt[5]{0{,}2}}$.

Type du calcul.

Calcul de $\sqrt[5]{0{,}2}$.

$$\begin{aligned}
\log' 0{,}2 &= 9{,}3010300 \\
\log' \sqrt[5]{0{,}2} &= 9{,}8602060 \\
\sqrt[5]{0{,}2} &= 0{,}7247797
\end{aligned}$$

Calcul principal.

$$\begin{aligned}
& 0{,}03 \\
& 0{,}7247797 \\
& \log' 0{,}7547797 = 9{,}8778202 \\
\log' x &= 9{,}9592734 = \log' 0{,}9104862
\end{aligned}$$

Exemple XII. Calculer l'expression $x = \dfrac{34 \left(\sqrt[3]{\dfrac{4957{,}6}{75894{,}89}}\right)^4}{6{,}879 \left(\sqrt{\dfrac{0{,}38987}{1{,}25789}}\right)^3}$.

Digitized by Google

Calcul de $\log\left(\sqrt[3]{\frac{4957,6}{75894,89}}\right)^4$

$$\begin{aligned}
\log 4957,6 &= 3,6952715\\
3\log 4957,6 &= 11,0858145\\
\text{c}^t\log 75894,89 &= 5,1197875\\
3\,\text{c}^t\log 75894,89 &= 15,3593625\\
\hline
\log'\left(\frac{4957,6}{75894,89}\right)^4 &= 5,2602360\\
\log'\left(\sqrt[3]{\frac{4957,6}{75894,89}}\right)^4 &= 8,4200786
\end{aligned}$$

Calcul de $\log\left(\sqrt{\frac{0,38987}{1,25789}}\right)^3$

$$\begin{aligned}
\log' 0,38987 &= 9,5909198\\
2\log' 0,38987 &= 19,1818396\\
\text{c}^t\log 1,25789 &= 9,9003573\\
2\,\text{c}^t\log 1,25789 &= 19,8007146\\
\hline
\log'\left(\frac{0,38987}{1,25789}\right)^3 &= 8,4738313\\
\log'\left(\sqrt{\frac{0,38987}{1,25789}}\right)^3 &= 9,2369156
\end{aligned}$$

Colonne principale. $\log'\left(\sqrt[3]{\frac{4957,6}{75894,89}}\right)^4 = 8,4200786$

$$\begin{aligned}
\log 34 &= 1,5314789\\
\text{c}^t\log'\left(\sqrt{\frac{0,38987}{1,25789}}\right)^3 &= 0,7630844\\
\text{c}^t\log 6,879 &= 9,1624747\\
\log' x &= 9,8771166\\
&= \log' 0,7535579
\end{aligned}$$

§ 10. Méthode des caractéristiques négatives*.

84. Ainsi que nous l'avons dit, comme un nombre plus petit que l'unité n'a pas de logarithmes, on élude la difficulté en le multipliant par une certaine puissance de 10, ce qui exige une correction après le retour au nombre.

Exemple I. Soit le nombre 0,96205.

Je le multiplie par 10, et il vient 9,6205; ce nombre étant plus grand que l'unité, a un logarithme 0,9831976; mais ce logarithme appartient à un nombre 10 fois trop grand, en

* Cette méthode suppose quelques connaissances du calcul algébrique.

sorte que si je faisais le retour au nombre, je devrais le diviser par 10. La division par 10 revient à retrancher une unité du logarithme (38); mais ici cette soustraction est impossible; on peut néanmoins *l'indiquer* comme en algèbre, et écrire 0,9831976 — 1, en se rappelant qu'ici — 1 n'est qu'un symbole pour rappeler qu'après le retour de 0,9831976 au nombre, on devra faire une division par 10.

Pour plus de commodité, on écrit — 1 à la place de la caractéristique, et pour que l'on ne croie pas que tout le nombre 1,9831976 est négatif, on place le signe — au-dessus de la caractéristique; on a ainsi $\bar{1}$,9831976, et l'on regarde cette expression, qu'on énonce *moins un, virgule, neuf cent quatre-vingt-trois, mille neuf cent soixante et seize,* comme le logarithme de la fraction décimale 0,96205; mais il ne faudra pas oublier que le nombre qu'on a en vue est 10 fois plus petit que celui dont le logarithme aurait la même partie décimale, avec *zéro* à la caractéristique. Or, les plus hautes unités du nombre 9,6205 correspondant au logarithme 0,9831976, sont des unités simples; après la division par 10, elles deviendront des dixièmes; voilà pourquoi on dit que: $\bar{1}$ (*moins un*) *est la caractéristique des dixièmes.*

Exemple II. Soit le nombre 0,096205.

Je le multiplie par 1000 afin de le rendre plus grand que l'unité, et j'obtiens 9,6205, dont le logarithme est 0,9831976. Si je revenais au nombre, je devrais le diviser par 100; la division par 100 reviendra à retrancher 2 unités du logarithme: ici, cette soustraction est impossible; je l'indique, et j'ai 0,9831976 — 2, ou $\bar{2}$,9831976, en me rappelant qu'il faudra diviser par 100 après le retour au nombre, effectué comme si la caractéristique était zéro : or, pour la caractéristique 0, le chiffre des plus hautes unités exprime des unités simples; donc, après la division par 100, il exprimera des centièmes; ainsi, $\bar{2}$ (*moins deux*) *est la caractéristique des centièmes.*

Exemple III. Soit le nombre 0,0096205.

Je multiplie par 1000, et j'ai log 9,6205 = 0,9831976, par suite log 0,0096205 = $\bar{3}$,9831976; après être revenu au nombre sans m'occuper de la caractéristique, j'observe que le chiffre

des plus hautes unités doit exprimer des *millièmes*, et ainsi des autres exemples.

En résumé, la caractéristique du logarithme d'un nombre est *négative* toutes les fois que ce nombre est plus petit que l'unité; par opposition, la caractéristique est dite *positive* quand il s'agit du logarithme d'un nombre plus grand que l'unité.

Si l'on rapproche les propriétés des caractéristiques négatives de celles des caractéristiques positives (37), on voit que : *la caractéristique indique le rang des plus hautes unités du nombre à partir des unités simples ; à* gauche *quand elle est positive*, *à* droite *quand elle est négative.*

D'après cela, on peut écrire :

$$\log 962{,}05 = 2{,}9831976$$
$$\log 96{,}205 = 1{,}9831976$$
$$\log 9{,}6205 = 0{,}9831976$$
$$\log 0{,}96205 = \bar{1}{,}9831976$$
$$\log 0{,}096205 = \bar{2}{,}9831976$$
$$\log 0{,}0096205 = \bar{3}{,}9831976$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\log 0{,}0000096205 = \bar{6}{,}9831976$$

Ces considérations conduisent aux deux règles suivantes :

85. Règle I. *Pour trouver le logarithme d'une fraction décimale proprement dite, on prend pour caractéristique le nombre qui exprime le rang des plus hautes unités décimales ; on place le signe — au-dessus, et l'on cherche dans la table la partie décimale, abstraction faite de la caractéristique.*

86. Règle II. *Réciproquement, pour trouver le nombre correspondant à un logarithme dont la caractéristique est négative, on opère, abstraction faite de cette caractéristique, et l'on met une virgule dans le nombre trouvé, de manière que les plus hautes unités soient d'un ordre décimal marqué par la valeur absolue de la caractéristique.*

87. Puisque les logarithmes à caractéristiques négatives n'ont pas été déduits de la conception primitive des logarithmes, et qu'une *convention* nouvelle a été faite pour attribuer un loga-

rithme à un nombre plus petit que l'unité, il est *nécessaire* de voir si ces logarithmes peuvent être soumis aux mêmes règles de calculs que les logarithmes des nombres plus grands que l'unité. Or, toutes ces règles dépendent du principe fondamental (23); voyons donc, en premier lieu, si ce principe subsiste dans le cas actuel.

Extension du principe fondamental.

88. Soit $P = A \times B$ le produit de deux nombres. On peut faire quatre hypothèses :

$$A > 1 \quad \text{et} \quad B > 1$$
$$A < 1 \quad \text{et} \quad B < 1$$
$$A < 1 \quad \text{et} \quad B > 1$$
$$A > 1 \quad \text{et} \quad B < 1$$

Dans la première, le principe est démontré; la quatrième rentre dans la troisième à cause de la permutation des facteurs; reste donc à s'occuper des deux autres.

1er Cas.

$$A < 1 \quad \text{et} \quad B < 1.$$

D'après les principes qui ont d'abord été posés, le logarithme de A se compose d'une partie *entière* négative et d'une *fraction* décimale positive. Soient E la valeur absolue de la partie entière, ou de la caractéristique négative, et F la fraction décimale, je puis poser

$$\log A = \overline{E}, F,$$

et de même

$$\log B = \overline{E'}, F'.$$

Pour appliquer rigoureusement le calcul logarithmique à la recherche du produit AB, il faut éviter dans le cours du calcul l'emploi des caractéristiques négatives. Je multiplie le facteur A par 10^E, et le facteur B par $10^{E'}$, ce qui fait passer la première décimale à la place des unités simples; les deux facteurs auront alors des logarithmes dont les parties décimales seront les mêmes qu'auparavant, et dont les caractéristiques seront 0;

le produit P sera multiplié par $10^{E}.10^{E'}$ ou par $10^{E+E'}$ (*Traité d'Algèbre*), et j'aurai

$$P.10^{E+E'}=A.10^{E}\times B.10^{E'}.$$

Comme ici les deux facteurs sont chacun plus grands que l'unité, je puis appliquer le principe fondamental, et écrire

$$\log(P.10^{E+E'})=\log(A.10^{E})+\log(B.10^{E'});$$

or,
$$\log(A.10^{E})=0,F,$$
$$\log(B.10^{E'})=0,F',$$

donc
$$\log(P.10^{E+E'})=0,F+0,F'.$$

L'addition des deux fractions décimales 0,F et 0,F' donnera une partie décimale $0,f$ et une partie entière e qui peut être 1 ou 0 ; je puis alors écrire

$$\log(P.10^{E+E'})=e+0,f.$$

Si je revenais au nombre, je devrais, pour avoir P, diviser le résultat trouvé par $10^{E+E'}$; cette division reviendrait à retrancher E+E' de la caractéristique e. Or, deux cas peuvent se présenter : si la soustraction $e-(E+E')$ est *possible*, la différence p est *positive*, et j'ai en premier lieu

$$\log P=p,f.$$

Si la soustraction est impossible, c'est-à-dire si E+E' surpasse e, je commence par supprimer e; puis, d'après la convention, je prends une caractéristique *négative* égale à l'excès p de E+E' sur e, et j'ai en second lieu

$$\log P=\bar{p},f.$$

D'un autre côté, si je fais la *somme algébrique* des logarithmes de A et de B, comme $\log A=-E+0,F$ et que $\log B=-E'+0,F'$, j'obtiens successivement

$\log A+\log B=-E+0,F+-E'+0,F'=-E-E'+0,F+0,F'$ $=-(E+E')+e+0,f=p+0,f=p,f$ si la soustraction $e-(E+E')$ est possible; $=-p+0,f=\bar{p},f$ si la soustraction est impossible : or ces résultats sont les mêmes que ceux qui ont été trouvés tout à l'heure par une méthode rigoureusement démontrée; il est donc permis de poser

$$\log AB=\log A+\log B.$$

En conséquence, le logarithme d'un produit est la somme algébrique des logarithmes des facteurs, lorsque chaque facteur est plus petit que l'unité.

2e Cas.

$$A<1 \quad \text{et} \quad B>1.$$

$$\log A = \bar{E},F,$$

$$\log B = E',F'.$$

Je multiplie A par 10^E, et j'ai

$$P.10^E = A,10^E \times B,$$

d'où $\log(P.10^E) = \log(A.10^E) + \log B;$

mais $\log(A.10^E) = 0,F,$

donc $\log(P.10^E) = 0,F + E' + 0,F'.$

Je pose $0,F + 0,F' = e + 0,f$

et il vient [1] $\log(P.10^E) = E' + e + 0,f.$

Soient en premier lieu $E' + e > E$, et p la différence ; j'aurai

$$\log(P.10^E) = E + p + 0,f.$$

Divisant le nombre par 10^E, ou, ce qui revient au même, supprimant E à la caractéristique du logarithme, il vient

$$\log P = p,f.$$

Soit en second lieu $E' + e < E$, d'où $E = E' + e + p$; l'égalité [1] devient

$$\log(P.10^{E'+e+p}) = E' + e + 0,f.$$

Divisant le nombre par $10^{E'+e}$, ou bien retranchant $E' + e$ du logarithme, j'obtiens

$$\log(P.10^p) = 0,f,$$

ou, d'après la notation des caractéristiques négatives,

$$\log P = \bar{p},f.$$

D'autre part, si je fais la *somme algébrique* des logarithmes, comme $\log A = -E + 0,F$, et que $\log B = E' + 0,F'$, j'ai, dans

un cas, $\log A + \log B = -E + E' + e + 0,f = p + 0,f = p,f$, et dans un autre, $\log A + \log B = -p + 0,f = p,f$, c'est-à-dire les mêmes résultats que j'ai trouvés par une méthode rigoureuse; donc il est permis de dire sans restriction que :

Le logarithme d'un produit est la somme algébrique des logarithmes de ses facteurs.

La généralité de ce principe entraînant celle des conséquences qui en ont d'abord été déduites aux nos 25, 26, 27, nous récapitulerons les propriétés des logarithmes ainsi qu'il suit :

89. 1° *Le logarithme d'un produit est la somme algébrique des logarithmes de ses facteurs.*

2° *Le logarithme de la puissance d'un nombre est le produit algébrique du logarithme de ce nombre par le degré de la puissance.*

3° *Le logarithme d'un quotient est algébriquement égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

4° *Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au quotient algébrique du logarithme de ce nombre par l'indice de la racine à extraire.*

Il nous reste maintenant à examiner comment on introduira dans le calcul un logarithme à caractéristique négative. On peut avoir à le soumettre à quatre opérations distinctes : l'*ajouter*, le *soustraire*, le *multiplier* et le *diviser*.

§ 11. Des quatre opérations relatives à un logarithme à caractéristique négative.

90. Addition. On écrit les logarithmes les uns au-dessous des autres, tels qu'ils sont; on fait l'addition des parties décimales d'après la règle ordinaire; on ajoute ensuite la retenue entière et positive avec les caractéristiques, en ayant égard à la fois aux valeurs absolues et aux signes de ces caractéristiques selon les règles de l'algèbre.

91. Soustraction. Soit un logarithme à soustraire dans l'ensemble d'un calcul logarithmique.

Je le désigne par E,F; E indiquant la caractéristique négative ou nulle, et 0,F la partie décimale. Soit A le nombre correspondant, j'aurai $\log A = E,F = E + 0,F$; or, soustraire $\log A$, c'est la même chose qu'ajouter $-\log A$ dans

l'ensemble des logarithmes. Cela posé, pour ne pas avoir de partie décimale négative, j'ajoute une unité pour en soustraire la partie décimale, et, par compensation, je retranche une unité en augmentant de 1 la valeur absolue de la caractéristique négative, de telle sorte que

$$-\log A = -(E+1)+(1-0,F).$$

La partie $1-0,F$ est ce qu'on appelle le complément de la partie décimale $0,F$ à l'unité, et qui peut s'écrire à vue d'œil. Donc,

92. Règle. *Pour soustraire un logarithme*, on prend la caractéristique en signe contraire après y avoir ajouté une unité, puis on écrit à la suite le complément de la partie décimale à l'unité.

Exemple I. Soustraire $\log A = 2,3758619$.

Avant de soustraire, j'augmente la caractéristique 2 de 1, et je dis : 2 et 1 font 3, et pour soustraire, $\bar{3}$ (moins 3); au lieu de la partie décimale 0,3758619 je lis à vue d'œil 6241381, en sorte que j'écris, dans la colonne des logarithmes, $-\log A = \bar{3},6241381$.

Exemple II. Soustraire $\log A = 0,3758619$.

Je dis : 0 et 1 font 1 pour soustraire, $\bar{1}$; puis prenant le complément à l'unité de la partie décimale, j'écris $-\log A = \bar{1},6241381$.

Exemple III. Soustraire $\log A = \bar{4},3958619$.

$-4+1=-3$, et pour soustraire, $+3$; par conséquent, $-\log A = 3,6241381$.

93. Multiplication. L'opération correspondante à la formation de la puissance consiste à multiplier le logarithme par le degré de cette puissance, c'est-à-dire par un nombre entier. Si la caractéristique est positive, il n'y a aucune difficulté. *Si elle est négative*, on multiplie d'abord la partie décimale, puis, après avoir multiplié la caractéristique, on ajoute à ce produit la retenue qui a pu provenir de la multiplication du chiffre des dixièmes.

Exemple. Multiplier $\log A = \bar{4},8758619$ par 5.

Je dis comme à l'ordinaire : 5 fois 9 font 45; je pose 5 et je

retiens 4; 5 fois 1 font 5, et 4 font 9; et ainsi de suite. Parvenu aux dixièmes, je dis : 5 fois 8 font 40, et 3 de retenue font 43, je pose 3 et je retiens 4; 5 fois — 4 font — 20; — 20 et + 4 font — 16, en sorte que j'écris dans la colonne des logarithmes $\overline{16}$,3793095.

94. Extraction des racines. L'extraction de la racine correspond à la division du logarithme par l'indice de la racine à extraire. Si la caractéristique est positive, pas de difficultés. *Si elle est négative*, on la rend multiple de l'indice en augmentant sa valeur absolue d'un certain nombre d'unités, et le plus petit possible, ce qui revient à la diminuer algébriquement du nombre d'unités ajoutées; on ajoute par compensation autant de dizaines au chiffre des dixièmes avant de diviser par l'indice, et l'on continue la division de la partie décimale comme à l'ordinaire.

Exemple. Prendre le cinquième de $\overline{3}$,4238256.

Au lieu de compter — 3 pour caractéristique, je compte — 5; mais au lieu de compter 4 dixièmes, j'en compte 24, puis je dis : le cinquième de $\overline{5}$ est $\overline{1}$, et j'écris $\overline{1}$; le cinquième de 24 est de 4 pour 20, j'écris 4 à la droite de $\overline{1}$, et j'ai $\overline{1}$,4; je continue ainsi, et j'écris dans la colonne des logarithmes $\overline{1}$,4847651.

95. Pour exécuter un calcul logarithmique lorsqu'on a sous les yeux le tableau des opérations à faire sur les nombres, on se dispense d'indiquer celui des opérations auxquelles doivent être soumis les logarithmes; les unes doivent rappeler les autres.

On cherche à faire tenir, autant que possible, tous les calculs dans une seule colonne; c'est ce qui se peut, en général, lorsque l'expression dont il s'agit de calculer la valeur ne renferme ni le signe + ni le signe —, c'est-à-dire aucune quantité combinée par addition ou soustraction; toutefois, il est bon de remarquer que les extractions de racines peuvent rompre la colonne logarithmique, et exiger des opérations auxiliaires faites à part, dont on rapporte ensuite les résultats dans le calcul principal. C'est ce que nous allons éclaircir en reprenant la plupart des exemples que nous avons déjà traités par la méthode des compléments.

Google

Exemple I. Calculer l'expression

$$x = 184{,}56 \times 564000 \times 0{,}94 \times 0{,}0002564.$$

Type du calcul.

$$\begin{aligned} \log 184{,}56 &= 2{,}2661376 \\ \log 564000 &= 5{,}7512791 \\ \log 0{,}94 &= \bar{1}{,}9731279 \\ \log 0{,}0002564 &= \bar{4}{,}4089180 \\ \hline \log x &= 4{,}3994626 = \log 25087{,}80 \end{aligned}$$

Exemple II. Calculer l'expression

$$x = \frac{0{,}94 \times 0{,}0002564 \times 0{,}72}{184{,}56 \times 0{,}0057}.$$

Type du calcul.

$$\begin{aligned} \log 0{,}94 &= \bar{1}{,}9731279 \\ \log 0{,}0002564 &= \bar{4}{,}4089180 \\ \log 0{,}72 &= \bar{1}{,}8573325 \\ -\log 184{,}56 &= \bar{3}{,}7338624 \\ -\log 0{,}0057 &= 2{,}2441251 \\ \hline \log x &= \bar{4}{,}2173659 = \log 0{,}0001649551 \end{aligned}$$

Exemple III. Calculer l'expression $x = \frac{0{,}157}{2{,}348} \times \frac{8{,}93}{0{,}00913}$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned} \log 0{,}157 &= \bar{1}{,}1958997 \\ \log 8{,}93 &= 0{,}9508515 \\ -\log 2{,}348 &= \bar{1}{,}6293019 \\ -\log 0{,}00913 &= 2{,}0395292 \\ \hline \log x &= 1{,}8155823 = \log 65{,}4007 \end{aligned}$$

Exemple IV. Calculer l'expression $x = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times 0,157}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{8} \times 0,00913}$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,30103000 \\
\log 4 &= 0,60205999 \\
\log 0,157 &= \bar{1},19589965 \\
\log 4 &= 0,60205999 \\
\log 8 &= 0,90308999 \\
-\log 3 &= \bar{1},52287875 \\
-\log 5 &= \bar{1},30103000 \\
-\log 3 &= \bar{1},52287875 \\
-\log 7 &= \bar{1},15490195 \\
-\log 0,00913 &= 2,03952922 \\
\hline
\log x &= 1,14535829 = \log 13,97521
\end{aligned}$$

Exemple V. Calculer l'expression $x = (\frac{2}{13})^5$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,30103000 \\
4 \log 2 &= 1,20412000 \\
-\log 13 &= \bar{2},88605665 \\
-4 \log 13 &= \bar{5},54422660 \\
\hline
& \bar{5},93543325 = \log 0,0000861853
\end{aligned}$$

Exemple VI. Calculer l'expression $x = \sqrt[3]{\frac{2}{13}}$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,30103000 \\
-\log 13 &= \bar{2},88605665 \\
\hline
& \bar{1},18708665 \\
\log x &= \bar{1},72902888 = \log 0,5358323
\end{aligned}$$

Exemple VII. Calculer l'expression $x = \sqrt[3]{(\frac{2}{13})^5}$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,30103000 \\
-\log 13 &= \bar{2},88605665 \\
\hline
& \bar{1},18708665 \\
& \bar{5},93543325 \\
\log x &= \bar{2},64514441 = \log 0,04417173
\end{aligned}$$

Exemple VIII. Calculer l'expression $x = (\sqrt[3]{\frac{2}{13}})^5$.

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}30103000 \\
4 \log 2 &= 1{,}20412000 \\
c^t \log 13 &= 8{,}88605665 \\
4\ c^t \log 13 &= 35{,}54422660 \\
&\overline{\bar{5}{,}93543325} \\
&\bar{2}{,}64514441 = \log 0{,}04417173.
\end{aligned}$$

Exemple IX. Calculer l'expression

$$x = \sqrt[7]{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times 28 \times 0{,}00037}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{8} \times 37485 \times 0{,}0029}}.$$

Type du calcul.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}30103000 \\
-\log 3 &= \bar{1}{,}52287874 \\
\log 4 &= 0{,}60205999 \\
-\log 5 &= \bar{1}{,}30103000 \\
\log 28 &= 1{,}44715803 \\
\log 0{,}00037 &= \bar{4}{,}56820172 \\
-\log 3 &= \bar{1}{,}52287874 \\
\log 4 &= 0{,}60205999 \\
-\log 7 &= \bar{1}{,}15490196 \\
\log 8 &= 0{,}90308999 \\
-\log 37485 &= \bar{5}{,}42614250 \\
-\log 0{,}0029 &= 2{,}53760200 \\
&\overline{\bar{5}{,}88903366} \\
\log x &= \bar{1}{,}41271909 = \log 0{,}2586539
\end{aligned}$$

Nous laisserons aux élèves le soin de traiter les autres exemples.

96. En résumé, pour exécuter un calcul par logarithmes à la simple inspection du tableau des opérations indiquées sur les nombres, on conçoit que les calculs à faire sur les *fractions* sont ramenés à des opérations sur leurs termes, en appliquant mentalement les règles des calculs fractionnaires; on commence par les *multiplications* et les *divisions*, opérations qui donnent

des logarithmes à ajouter ou à soustraire; on dispose ces logarithmes dans une même colonne qui devient la colonne principale; on passe ensuite aux calculs qui correspondent aux *élévations de puissances* et aux *extractions de racines* dans l'ordre même où elles se présentent dans l'expression proposée; on exécute à part (et dans la même page) les opérations auxiliaires, parfois nécessaires pour trouver certains logarithmes qui doivent ensuite être reportés dans la colonne principale; mais il faut éviter autant que possible ce partage du calcul logarithmique.

Lorsqu'on rencontre des expressions qui sont combinées par addition ou soustraction, on est obligé de faire les retours aux nombres, pour trouver ensuite les logarithmes qui doivent entrer dans le calcul principal.

Nous terminerons cette théorie par quelques applications géométriques.

Digitized by Google

APPLICATIONS

DES LOGARITHMES AUX FORMULES DE LA GÉOMÉTRIE.

PREMIÈRE PARTIE : **Géométrie plane.**

Aire du rectangle ou du parallélogramme dont on connaît la base et la hauteur.

Données.	Formule.	Résultat.
$B = 18^m,375$	$S = B \times H$	$S = 0^{mq},09972112$
$H = 0^m,005427$	$\log B = 1,2642273$	
	$\log' H = 7,7345598$	
	$\log' S = 8,9987871 = \log' 0,09972112$	

Aire du carré dont on connaît le côté.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$c = 842^m,57$	$S = c^2$	$S = 709925^{mq},3$
	$\log c = 2,9256060$	
	$\log c = 2,9256060$	
	$\log S = 5,8512120 = \log 709925,3$	

Aire du triangle dont on connaît la base et la hauteur.

Données.	Formule.	Résultat.
$B = 8439^m$	$S = \frac{B \times H}{2}$	$S = 244055^{mq},9$
$H = 57^m,84$		

$$\log B = 3,9262910$$
$$\log H = 1,7622283$$
$$c^t \log 2 = 9,6989700$$
$$\log S = 5,3874893 = \log 244055,9$$

Aire du triangle dont on connaît les trois côtés

Données.	Formule.	Résultat.
$a = 8^m,9427$	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	$S = 38^{mq},87722$
$b = 7^m,6549$		
$c = 12^m,5743$		
$2p = 29,1719$	$p - a = 5,64325$	
$p = 14,58595$	$p - b = 6,93105$	
	$p - c = 2,01165$	

$$\log p = 1,1639347$$
$$\log (p-a) = 0,7515293$$
$$\log (p-b) = 0,8407991$$
$$\log (p-c) = 0,3035524$$
$$\log S^2 = 3,0598155$$
$$\log S = 1,5299077 = \log 33,87722$$

Aire du triangle équilatéral dont on connaît le côté.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$a = 7^m,5792$	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S = 24^{mq},87440$

$$\log a = 0,8796234$$
$$\log a = 0,8796234$$
$$\log 3 = 0,47712125 \qquad \log \sqrt{3} = 0,23856062$$
$$c^t \log 4 = 9,39794001$$
$$\log S = 1,3957474 = \log 24,87440$$

Aire du trapèze dont on connaît les deux bases et la hauteur.

Données.	Formule.	Résultat.
$B = 0^m,47346$	$S = \frac{(B+b) \times H}{2}$	$S = 0^{mq},01516629$
$b = 0^m,08546$		
$H = 0^m,05427$		
$B + b = 0^m,55892$		

$$\log' (B+b) = 9,7473497$$
$$\log' H = 8,7345598$$
$$c^t \log 2 = 9,6989700$$
$$\log' S = 8,1808795 = \log 0,01516629$$

Aire du trapèze dont on connaît les quatre côtés.

Données.	Formule.	Résultat.
		$S = 20846^{mq},4$

$a = 428^m,35$
$b = 146^m,32$
$c = 157^m,44$
$d = 159^m,73$

$$S = \frac{(a+b)\sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}}{a-b}$$

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$a+b = 574,67$
$a-b = 282,03$
$p-a = 17,57$
$p-b = 299,60$
$p-b-c = 142,16$
$p-b-d = 139,87$

$\log(p-a) = 1,2447718$
$\log(p-b) = 2,4765418$
$\log(p-b-c) = 2,1527774$
$\log(p-b-d) = 2,1457246$
$8,0198156$

$\log\sqrt{} = 4,0099078$
$\log(a+b) = 2,7594185$
$c^t \log(a-b) = 7,5497047$

$\log S = 4,3190310 = \log 20846,4$

Longueur d'une circonférence dont on connaît le rayon.

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 0^m,0005792$	$C = 2\pi R$	$C = 0^m,003639221$
$\pi = 3,1415926\ldots$		

$\log 2 = 0,30103000$
$\log \pi = 0,49714987$
$\log' R = 6,7628286$

$\log' C = 7,56100847 = \log' 0,003639221$

Longueur d'une circonférence dont on connaît le diamètre.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$D = 1^m,00027$	$C = \pi D$	$C = 3^m,142441$

$\log \pi = 0,49714987$
$\log D = 0,00011724$

$\log C = 0,49726711 = \log 3,142441$

Longueur d'un arc dont on connaît la graduation et le rayon du cercle.

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 0^m,579$	$a = \frac{\pi R A}{180} = \frac{\pi R \times 1652}{180 \times 60}$	$a = 0^m,2782368$
$A = 27°32' = \frac{1652}{60}$		

$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log' R = 9,76267856$$
$$\log 1652 = 3,21804004$$
$$c^t \log 180 = 7,74472749$$
$$c^t \log 60 = 8,22184875$$
$$\log' a = 9,44444471 = \log' 0,2782368$$

Rayon d'une circonférence dont on connaît la longueur.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$C = 1^m,792$	$R = \frac{C}{2\pi}$	$R = 0^m,2852057$

$$\log C = 0,2533380$$
$$c^t \log 2 = 9,6989700$$
$$c^t \log \pi = 9,50285013$$
$$\log' R = 9,45515813 = \log' 0,2852057$$

Aire du cercle dont on connaît le rayon.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$R = 12^m,357$	$S = \pi R^2$	$S = 479^{mq},7067$

$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log R = 1,0919130$$
$$\log R = 1,0919130$$
$$\log S = 2,68097587 = \log 479,7067$$

Aire du cercle dont on connaît le diamètre.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$D = 0^m,07923$	$S = \frac{\pi D^2}{4}$	$S = 0^{mq},004930254$

$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log' D = 8,8988897$$
$$\log' D = 8,8988897$$
$$c^t \log 4 = 9,39794001$$
$$\log' S = 7,69286928 = \log' 0,004930254$$

Rayon du cercle dont on connaît la surface.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$S = 547^{mq},84$	$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$	$R = 13^{m},20541$

$$\log S = 2,7386537$$
$$c^t \log \pi = 9,50285013$$
$$\log R^2 = 2,24150383$$
$$\log R = 1,12075192 = \log 13,20541$$

Diamètre du cercle dont on connaît la surface.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$S = 0^{mq},00875$	$D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$	$D = 0^{m},10555021$

$$\log' S = 7,94200805$$
$$\log 4 = 0,60205999$$
$$c^t \log \pi = 9,50285013$$
$$\log' D^2 = 8,04691817$$
$$\log' D = 9,02345909 = \log' 0,10555021$$

Aire de l'anneau circulaire, connaissant les rayons des deux circonférences.

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 12^{m},578$	$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r)$	$S = 456^{mq},7776$
$r = 3^{m},579$		
$R + r = 16,157$	$\log \pi = 0,49714987$	
$R - r = 8,999$	$\log(R + r) = 1,2083607$	
	$\log(R - r) = 0,9544943$	
	$\log S = 2,65970487 = \log 456,7776$	

Rayon d'un cercle ; différence de deux autres.

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 8^{m},7592$	$x = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{(R + r)(R - r)}$	$x = 8^{m},717087$
$r = 0^{m},8579$		
$R + r = 9,6171$	$\log(R + r) = 0,9830444$	
$R - r = 7,9013$	$\log(R - r) = 0,8976986$	
	$\log x^2 = 1,8807427$	
	$\log x = 0,94037135 = \log 8,717087$	

Aire du secteur, connaissant son angle et le rayon de la circonférence.

Données.	Formule.	Résultat.
$a = 178^\circ$	$S = \frac{\pi R^2 a}{360}$	$S = 31577^{mq},55$
$R = 142^m,579$		

$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log R = 2,1540556$$
$$\log R = 2,1540556$$
$$\log a = 2,25042000$$
$$c' \log 360 = 7,4436975$$
$$\log S = \overline{4,49937857} = \log 31577,55$$

Aire de l'ellipse dont on connaît le demi-grand axe et le demi-petit axe.

Données.	Formule.	Résultat.
$a = 1^m,6427$	$S = \pi ab$	$S = 4^{mq},625015$
$b = 0^m,8962$		

$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log a = 0,2155583$$
$$\log' b = 9,9524049$$
$$\log S = \overline{0,66511307} = \log 4,625015$$

Calcul approximatif du nombre π au moyen des périmètres des polygones réguliers inscrits dans la circonférence dont le diamètre est 1.

Soit $AB = c$ le côté d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans une circonférence dont le rayon $OC = R$ est connu, auquel cas le périmètre $p = nc$ est également connu.

Soit $AC = x$ le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre double $2n$ de côtés, et dont le périmètre $y = 2nx$ doit être exprimé en fonction des quantités données. Soient enfin P le périmètre du polygone régulier circonscrit de n côtés, et r l'apothème OE.

Le triangle rectangle CAD donne

$$x^2 = 2R(R - r),$$

d'où

$$x = \sqrt{2R(R - r)};$$

or

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}};$$

d'ailleurs $c=\frac{p}{n}$, $x=\frac{y}{2n}$, $\frac{c^2}{4}=\frac{p^2}{4n^2}$, $r=\sqrt{R^2-\frac{p^2}{4n^2}}$;

donc $$\frac{y}{2n}=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{p^2}{4n^2}}\right)},$$

$$y=2n\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{p^2}{4n^2}}\right)},$$

ou [1] $$y=\sqrt{4n^2R\left(2R-\sqrt{4R^2-\frac{p^2}{n^2}}\right)}.$$

Telle est la formule qui va nous servir à calculer le périmètre d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés quand on connaît le périmètre d'un polygone régulier d'un nombre sous-double de côtés. Mais cherchons au préalable une limite de l'erreur que l'on commet lorsqu'on prend le périmètre p pour la circonférence elle-même C.

La relation $C-p<P-p$ donne

$$\frac{C-p}{p}<\frac{P-p}{p}=\frac{R-r}{r}=\frac{R}{r}-1;$$

remplaçant r par sa valeur, et posant $E=C-p$, il vient

$$\frac{E}{p}<\frac{R}{\sqrt{R^2-\frac{p^2}{4n^2}}}-1,$$

ou [2] $$\frac{E}{p}<\frac{2R}{\sqrt{4R^2-\frac{p^2}{n^2}}}-1,$$

formule d'où l'on tirera la limite de l'erreur E dès que l'on connaîtra p et n.

Lorsqu'on veut calculer π, on fait le diamètre égal à l'unité, d'où $R=\frac{1}{2}$, et les formules [1] et [2] deviennent

[3] $$y=\sqrt{2n^2\left(1-\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}\right)},$$

[4] $$E<p\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}}-1\right).$$

Si d'ailleurs dans cette relation [4] on remplace p par des valeurs plus grandes, l'inégalité aura lieu *à fortiori*, et l'on obtiendra une limite de l'erreur commise en prenant p pour π.

La limite ci-dessus peut servir à reconnaître jusqu'où les calculs doivent

être poussés pour que l'erreur tombe au-dessous de $\frac{1}{10^n}$, de $\frac{1}{10^2}$, par exemple.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on prenne pour point de départ le périmètre du *carré* inscrit, auquel cas les polygones dont nous calculerons les périmètres seront successivement représentés par les nombres :

$$4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad 128 \quad 256\ldots;$$

dès lors, il suffira de calculer une limite supérieure de n, et de voir entre lesquels de ces nombres elle se trouve comprise ; le plus grand indiquera par son rang une limite supérieure du nombre des périmètres que l'on doit calculer.

On satisfera *à fortiori* à la condition prescrite $E < \frac{1}{1000}$ en posant

$$p\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}}-1\right) < \frac{1}{1000},$$

et, à plus forte raison, en remplissant la condition

$$4\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4^2}{n^2}}}-1\right) < \frac{1}{1000},$$

car on a $p < 4$; 4 étant le périmètre du carré circonscrit.

De cette inégalité on déduit successivement :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4^2}{n^2}}} < \frac{1}{1000}+1 = \frac{1001}{1000},$$

$$\sqrt{1-\frac{4^2}{n^2}} > \frac{1000}{1001},$$

$$1-\frac{4^2}{n^2} > \frac{(1000)^2}{(1001)^2},$$

$$\frac{4^2}{n^2} < 1-\frac{(1000)^2}{(1001)^2} = \frac{8001}{(1001)^2},$$

$$n^2 > \frac{(1001)^2 \times 4^2}{8001},$$

$$n > \frac{1001 \times 4}{\sqrt{8001}};$$

et comme on a $\sqrt{8001} > 89$, il suffira de poser

$$n > \frac{1001 \times 4}{89} = 179\ \frac{73}{89};$$

puis comme cette limite est comprise entre 128 et 256, on peut conclure qu'il sera inutile d'aller au delà du polygone régulier de 256 côtés: il est même probable qu'il suffira de s'arrêter au polygone de 128 côtés : on fera donc le calcul du périmètre de ce polygone de 128 côtés ; on calculera la limite de l'erreur commise à l'aide de la formule [4], puis on verra s'il convient de s'arrêter, ou d'aller jusqu'au polygone de 256 côtés.

Effectuons ce calcul par logarithmes : à cet effet, en nous reportant à la formule [3], nous calculerons $\frac{p^2}{n^2}$ par logarithmes; nous retrancherons le nombre trouvé de l'unité; nous calculerons $\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}$ par logarithmes; nous retrancherons de l'unité, et finalement nous calculerons

$$\sqrt{2n^2\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}\right)}.$$

Quant au polygone de 4 côtés, nous calculons son périmètre directement. En ce qui regarde l'octogone régulier, nous ne calculons pas $\frac{p^2}{n^2}$, car nous avons immédiatement

$$p^2=8,\ \frac{p^2}{n^2}=\frac{1}{2},\ \sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{4}\,2\sqrt{2}=\frac{1}{4}\sqrt{8},$$

c'est-à-dire le quart du périmètre du carré.

Il convient aussi de remarquer que, dans chaque calcul, il n'est pas nécessaire de chercher log p, puisqu'il est le même que log y, fourni par le calcul précédent.

On peut aussi observer qu'à la rigueur on peut se dispenser de calculer y, puisqu'on n'a besoin que de log y, qui, dans le calcul suivant, devient log p. Mais on a ainsi une espèce de vérification (On n'a besoin de y que pour le polygone auquel on s'arrête.)

Actuellement que la marche des opérations se trouve complétement indiquée, leur exécution par logarithmes ne présente aucune difficulté.

TABLEAU DES OPÉRATIONS.

1° Polygone de 4 côtés : $y=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$.

$$\log 8 = 0,90308999$$
$$\log\sqrt{8} = 0,45154499 = \log 2,8284275$$

2° Polygone de 8 côtés. Valeurs à substituer dans [3] : $n=4$; $p=2,8284275$.

$$\frac{p^2}{n^2}=\frac{1}{2}$$

$$1-\frac{p^2}{n^2}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{8}=0,70710687$$

$$1-\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}=0,29289313$$

$$\log'\left(1-\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}\right)=9,4667092$$

$$\log n=0,60205999$$
$$\log n=0,60205999$$
$$\log 2=0,30103000$$
$$\log y^2=0,97185918$$
$$\log y=0,48592959=\log 3,061467$$

3° Polygone de 16 côtés. Valeurs à substituer : $n=8$; $p=3,061462$.

$$\log p=0,48592959$$
$$\log p=0,48592959$$
$$c^t \log n=9,09691001$$
$$c^t \log n=9,09691001$$

$$\log'\frac{p^2}{n^2}=9,16567920=\log' 0,14644657$$

$$1-\frac{p^2}{n^2}=0,85355343$$

$$\log'\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)=9,9312307$$

$$\log'\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}=9,9656154=\log 0,9238796$$

$$1-\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}=0,0761204$$

$$\log'\left(1-\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}\right)=8,8815011$$

$$\log n=0,90308999$$
$$\log n=0,90308999$$
$$\log 2=0,30103000$$
$$\log y^2=0,98871108$$
$$\log y=0,49435554=\log 3,121444$$

4° Polygone de 32 côtés. Valeurs à substituer : $n=16$; $p=3,121444$.

$$\log p = 0,49435554$$
$$\log p = 0,49435554$$
$$\text{c}^{\text{t}} \log n = 8,79588002$$
$$\text{c}^{\text{t}} \log n = 8,79588002$$
$$\log' \frac{p^2}{n^2} = 8,58047112 = \log' 0,0380602$$
$$1 - \frac{p^2}{n^2} = 0,9619398$$
$$\log' \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right) = 9,9831480$$
$$\log' \left(\sqrt{1 - \frac{p}{n^2}}\right) = 9,9915740 = \log' 0,9807854$$
$$\left(1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}\right) = 0,0192146$$
$$\log' \left(1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}\right) = 8,2836314$$
$$\log n = 1,20414998$$
$$\log n = 1,20414998$$
$$\log 2 = 0,30103000$$
$$\log y^2 = 0,99290436$$
$$\log y = 0,49645068 = \log 3,136539$$

5° Polygone de 64 côtés. Valeurs à substituer : $n=32$; $p=3,136539$.

$$\log p = 0,49645068$$
$$\log p = 0,49645068$$
$$\text{c}^{\text{t}} \log n = 8,49485002$$
$$\text{c}^{\text{t}} \log n = 8,49485002$$
$$\log' \frac{p^2}{n^2} = 7,98260140 = \log' 0,009607300$$
$$1 - \frac{p^2}{n^2} = 0,9903927$$
$$\log' \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right) = 9,9958074$$
$$\log' \left(\sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}\right) = 9,9979037 = \log' 0,9954847$$
$$1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}} = 0,0048153$$
$$\log' 1 - \left(\sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}\right) = 7,6826233$$
$$\log n = 1,50514998$$
$$\log n = 1,50514998$$
$$\log 2 = 0,30103000$$
$$\log y^2 = 0,99395326$$
$$\log y = 0,49697663 = \log 3,140339$$

6° Polygone de 128 côtés. Valeurs à substituer : $n = 64$; $p = 3,140339$.

$$\log p = 0,49697663$$
$$\log p = 0,49697663$$
$$c^t \log n = 8,19382003$$
$$c^t \log n = 8,19382003$$
$$\log' \frac{p^2}{n^2} = 7,38159332 = \log' 0,002407650$$

$$1 - \frac{p^2}{n^2} = 0,997592350$$

$$\log' \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right) = 9,99895315$$

$$\log' \left(\sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}\right) = 9,99947657 = \log' 0,9987954$$

$$1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}} = 0,0012046$$

$$\log' \left(1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}\right) = 7,0808429$$

$$\log n = 1,80617997$$
$$\log n = 1,80617997$$
$$\log 2 = 0,30103000$$
$$\log y^2 = 0,99423284$$
$$\log y = 0,49711642 - \log 3,141351$$

7° Calcul de l'erreur $E < p\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}}-1\right)$; $p=3,141351$; $n=128$.

$$\log p = 0,49714642$$
$$\log p = 0,49714642$$
$$c^t \log n = 7,89279003$$
$$c^t \log n = 7,89279003$$
$$\log' \frac{p^2}{n^2} = 6,77984290 = \log' 0,00060230$$

$$1-\frac{p^2}{n^2} = 0,99939770$$

$$\log' \left(1-\frac{p^2}{n^2}\right) = 9,99973844$$

$$\log' \left(\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}\right) = 9,99986920 = \log' 0,9996989$$

$$\log 1 = 0,00000000$$

$$c^t \log' \left(\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}\right) = 0,00013080$$

$$\log \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}} = 0,00013080 = \log 1,0003012$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}} - 1 = 0,0003012$$

$$\log p = 0,49714642$$

$$\log' \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}}-1\right) = 6,47885500$$

$$\log E = 6,97597142 = \log' 0,00094617$$

Ainsi, $E < 0,001$, et l'on peut conclure que 3,141 est la valeur de π à 0,001 près, ce qu'il fallait trouver.

Remarque. S'il eût été nécessaire d'aller plus loin, le calcul précédent aurait servi en partie, ainsi qu'on le voit ci-après :

Polygone de 256 côtés : $n = 128$; $p = 3,141351$.

$$\sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}} = 0,9996989$$

$$1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}} = 0,0003011$$

$$\log\left(1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}\right) = 6,4787108$$

$$\begin{aligned} \log n &= 2,10720997 \\ \log n &= 2,10720997 \\ \log 2 &= 0,30103000 \\ \log y^2 &= \overline{0,99416074} \\ \log y &= 0,49708037 = \log 3,14109 \end{aligned}$$

Ainsi la valeur de π redevient plus petite, et se trouve moins approchée.

Pour se rendre compte de cette circonstance, il suffit d'observer qu'à mesure que le nombre des côtés augmente, les logarithmes sont de plus en plus erronés. Or, l'un des facteurs $2n^2$ sous le radical croît rapidement, et l'autre $1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}$ décroît moins rapidement ; d'ailleurs le nombre $2n^2$ est de beaucoup plus grand que $1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}$; puis, comme l'erreur commise au logarithme d'un produit de trois facteurs $2 \times n \times n$ est plus grande que l'erreur commise au logarithme d'un seul facteur $1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}$, il suffit que cette erreur soit par défaut dans les trois premiers et par excès dans le dernier, pour que l'erreur puisse augmenter.

DEUXIÈME PARTIE : **Géométrie dans l'espace.**

Volume du parallélipipède ou du prisme dont on connaît la base et la hauteur.

Données.	Formule.	Résultat.
$B = 17^{mq},5479$	$V = B \times H$	$V = 49^{mc},01831$
$H = 2^{m},7934$	$\log B = 1,2442252$	
	$\log H = 0,4461331$	
	$\log V = 1,6903583 = \log 49,01831$	

Volume de la pyramide dont on connaît la base et la hauteur.

Données.	Formule.	Résultat.
$B = 0^{mq},057964$	$V = \frac{BH}{3}$	$V = 0^{mc},01530829$
$H = 0^{m},7923$		
	$\log' B = 8,7631583$	
	$\log' H = 9,8988897$	
	$c^t \log 3 = 9,52287875$	
	$\log' V = 8,18492675 = \log' 0,01530829$	

Volume du tétraèdre régulier dont on connaît l'arête.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$a = 3^{m},757$	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$V = 6^{mc},249659$
$\log 2 = 0,30103000$	$\log \sqrt{2} = 0,15051500$	
	$\log a = 0,5748412$	
	$\log a = 0,5748412$	
	$\log a = 0,5748412$	
	$c^t \log 12 = 8,92081875$	
	$\log V = 0,79585735 = \log 6,249659$	

Côté d'un tétraèdre régulier en argent.

Données.	Formule.	Résultat.
$S = 800^{fr}$, prix du tétraèdre; $p = 0^{fr},2$, prix du g^{rme} d'argent; $D = 10,5 =$ densité de l'argent.	$x = \sqrt[6]{\frac{(12)^2 . S^2}{2\, D^2 p^2}}$	$14^{centim},78583$

$$\log 12 = 1,07918125$$
$$\log 12 = 1,07918125$$
$$\log S = 2,90308999$$
$$\log S = 2,90308999$$
$$c^t \log 2 = 9,69897000$$
$$c^t \log D = 8,97881070$$
$$c^t \log D = 8,97881070$$
$$c^t \log' p = 0,69897000$$
$$c^t \log' p = 0,69897000$$
$$\log x^6 = 7,01907388$$
$$\log x = 1,16984564 = \log 14,78583$$

Volume du tronc de pyramide dont on connaît les bases et la hauteur.

Données.	Formule.	Résultat.
$B = 7^{mq},58$ $b = 4^{mq},46$ $H = 0^{m},957$	$V = \frac{H\,(B + b + \sqrt{Bb})}{3}$	$V = 5^{mc},69554$

Calcul de $\sqrt{Bb}$:
$$\log B = 0,87966921$$
$$\log b = 0,64933486$$
$$\log Bb = 1,52900407$$
$$\log \sqrt{Bb} = 0,76450203 = \log 5,844362$$

Calcul de $B + b + \sqrt{Bb}$:
$$B = 7,58$$
$$b = 4,46$$
$$\sqrt{Bb} = 5,844362$$
$$B + b + \sqrt{Bb} = 17,854362$$

Calcul principal :
$$\log' H = 9,98094494$$
$$\log (B + b + \sqrt{Bb}) = 1,25174430$$
$$c^t \log 3 = 9,52287875$$
$$\log V = 0,75553499 = \log 5,69554$$

Volume du prisme tronqué dont on connaît la base et les distances aux trois sommets de la base supérieure.

Données.	Formule.	Résultat.
$B = 7^{mq},256$	$V = \frac{B(H + H' + H'')}{3}$	$V = 7^{mc},428449$
$H = 0^{m},8745$		
$H' = 0^{m},9547$		
$H'' = 1^{m},2421$		

$$\log B = 0,8606973$$
$$\log (H + H' + H'') = 0,4873222$$
$$c^t \log 3 = 9,52287875$$
$$\log V = 0,87089825 = \log 7,428449$$

Surface latérale du cylindre dont on connaît le rayon de la base et la hauteur.

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 3^{m},54872$	$S = 2\pi RH$	$S = 146^{mq},0352$
$H = 6^{m},54947$		

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log R = 0,5500747$$
$$\log H = 0,8162062$$
$$\log S = 2,16445777 = \log 146,0352$$

Volume du cylindre dont on connaît le rayon de la base et la hauteur.

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 47^{m},576$	$V = \pi R^2 H$	$V = 37656^{mc},57$
$H = 52^{m},956$		

$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log R = 1,6773879$$
$$\log R = 1,6773879$$
$$\log H = 1,7239152$$
$$\log V = 5,57584087 = \log 37656,57$$

Dimensions du litre cylindrique pour les liquides.

Données.	Formule.	Résultat.
La hauteur $2x$, double du diamètre x de la base.	$x = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$	Diamètre = 86 millim. Hauteur = 172 millim.

Le volume = 1 décim. cube.

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$c^t \log' \pi = 9{,}50285013$$
$$\log' x^3 = 9{,}80388013$$
$$\log' x = 9{,}93462671 = \log' 0{,}860254$$

Donc en millimètres, le diamètre sera 86,0254, et la hauteur 172,0508, ou, en n'adoptant que les dixièmes, D = 86, H = 172.

Dimensions du litre cylindrique pour les matières sèches.

Données.	Formule.	Résultat.
La hauteur x = le diamètre; Le volume = 1 décimètre cube.	$x = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$	$108^{\text{mill.}},4$

$$\log 4 = 0{,}60205999$$
$$c^t \log \pi = 9{,}50285013$$
$$\log x^3 = 0{,}10491012$$
$$\log x = 0{,}03497004 = \log 1{,}083852$$

Surface latérale du cône dont on connaît le rayon de la base et le côté.

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 0^m{,}057$ $C = 0^m{,}738$	$S = \pi RC$	$S = 0^{mq}{,}1324542$

$$\log \pi = 0{,}49714987$$
$$\log' R = 8{,}75587486$$
$$\log' C = 9{,}86805636$$
$$\log' S = 9{,}12108109 = \log' 0{,}1324542$$

Volume du cône dont on connaît le rayon de la base et la hauteur

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 1^m,579$	$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$	$V = 3^{mc},2532$
$H = 1^m,246$		

$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log R = 0,1983821$$
$$\log R = 0,1983821$$
$$\log H = 0,0955180$$
$$c^t \log 3 = 9,52287875$$
$$\log V = 0,54234082 = \log 3,2532$$

Surface latérale du tronc de cône dont on connaît le côté et les rayons des bases.

Données.	Formule.	Résultat.
$c = 18^m,547$	$S = \pi c(R + r)$	$S = 1993^{mq},027$
$R = 21^m,548$		
$r = 12^m,657$		
$R + r = 34^m,205$		

$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log c = 1,2682737$$
$$\log (R + r) = 1,5340896$$
$$\log S = 3,29954317 = \log 1993,027$$

Volume du tronc de cône dont on connaît la hauteur et les rayons des bases.

Données.	Formule.	Résultat.
$H = 0,9572$	$V = \frac{\pi H R^2}{3}\left[1 + \frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$	$V = 1^{mc},554572$
$R = 0,8759$		
$r = 0,5482$		

Calcul de $\frac{r}{R}$: $\log' r = 9,7389390$

$$c^t \log' R = 0,0575455$$
$$\log' \frac{r}{R} = 9,7964845 = \log' 0,6258706$$
$$\log' \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 9,5929690 = \log' 0,3917139$$
$$1 + \frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{2,0175845}$$
$$\log \left[1 + \frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = 0,30483177$$
$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log' R = 9,9424545$$
$$\log' R = 9,9424545$$
$$\log' H = 9,9840027$$
$$c^t \log 3 = 9,52287875$$
$$\log' V = 0,19077209 = \log' 1,554572$$

Surface de la sphère dont on connaît le rayon.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$R = 0^m,334$	$S = 4\pi R^2$	$S = 1^{mq},401854$

$$\log 4 = 0,60205999$$
$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log' R = 9,52374647$$
$$\log' R = 9,52374647$$
$$\log S = 0,14670280 = \log 1,401854$$

Surface de la sphère dont on connaît le diamètre.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$D = 3251^m,7$	$S = \pi D^2$	$S = 33217800^{mq}$

$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log D = 3,5121405$$
$$\log D = 3,5121405$$
$$\log S = 7,52137087 = \log 33217800$$

Rayon de la sphère dont on connaît la surface.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$S = 8735^{mq},75$	$R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$	$R = 26^m,36606$

$$\log S = 3,9413002$$
$$c^t \log 4 = 9,39794001$$
$$c^t \log \pi = 9,50285013$$
$$\log R^2 = 2,84209034$$
$$\log R = 1,42104517 = \log 26,36606$$

Digitized by Google

Rayon d'une sphère d'or valant 20 francs.

Données.	Formule.	Résultat.
20 = prix de la sphère; S = 3444^{fr},45 = prix du kilog. d'or; D = 19,26 = densité de l'or.	$x = \sqrt[3]{\frac{5}{6.42.\pi.S}}$	$x = 4^{millim}$,16

$$\log 5 = 0,69897000$$
$$c^t \log \pi = 9,50285013$$
$$c^t \log S = 6,46288010$$
$$c^t \log 6,42 = 9,19246497$$
$$\log' x^3 = 5,85716520$$
$$\log' x = 8,61905507 = \log' 0,04159633$$

(L'unité de la formule est le décimètre.)

Volume de la sphère dont on connaît le rayon.

Donnée.	Formule.	Résultat.
R = 0^m,14378	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$	V = 0^{mc},01245042

$$\log 4 = 0,60205999$$
$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log' R = 9,1576985$$
$$2 \log' R = 18,3153970$$
$$c^t \log 3 = 9,52287875$$
$$\log' V = 8,09518411 = \log' 0,01245042$$

Volume de la sphère dont on connaît le diamètre.

Donnée.	Formule.	Résultat.
D = 0^m,6666666	$V = \frac{\pi D^3}{6}$	V = 0^{mc},1551403

$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log' D = 9,82390869$$
$$2 \log' D = 19,64781738$$
$$c^t \log 6 = 9,22184875$$
$$\log' V = 9,19072469 = \log' 0,1551403$$

Rayon d'une sphère dont on connaît le volume.

Donnée.	Formule.	Résultat.
$V = 657^{mc},947$	$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$	$R = 5^{m},39553$

$$\log 3 = 0,47712125$$
$$\log V = 2,8181909$$
$$c^t \log 4 = 9,39794001$$
$$c^t \log \pi = 9,50285013$$
$$\log R^3 = 2,19610229$$
$$\log R = 0,7320341 = \log 5,39553$$

Surface de la zone, connaissant sa hauteur et le rayon de la sphère.

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 87^{m},542$	$S = 2\pi RH$	$S = 96^{mq},64250$
$H = 0^{m},1757$		

$$\log 2 = 0,30103000$$
$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log R = 1,9422165$$
$$\log H = 9,2447718$$
$$\log S = 1,98516817 = \log 96,64250$$

Volume engendré par un secteur circulaire autour d'un diamètre.

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 4^{m},57923$	$V = \frac{2\pi R^2 H}{3}$.	$V = 2^{mc},543737$
$H = 0^{m},05792$		

$$\log 2 = 0,30103000$$
$$\log \pi = 0,49714987$$
$$\log R = 0,6607925$$
$$\log R = 0,6607925$$
$$\log H = 8,7628286$$
$$c^t \log 3 = 9,52287875$$
$$\log V = 0,40547222 = \log 2,543737$$

Rayon d'une sphère équivalente à une sphère creuse.

Données.	Formule.	Résultat.
$R = 1^m,2957$	$x = \sqrt[3]{R^3 - r^3}$	$x = 0^m,1594118$
$r = 1^m,2949$	ou $x = \sqrt[3]{R^3\left\{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right\}}$	

Calcul de $\left(\frac{r}{R}\right)^3$:

$$\log r = 0,1122362$$
$$\text{c}^t \log R = 9,8874955$$
$$\log \frac{r}{R} = 9,9997317$$
$$\log' \left(\frac{r}{R}\right)^3 = 9,9991951$$

Calcul de $1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3$:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^3 = 0,9981482$$
$$1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 0,0018518$$

Calcul principal de x :

$$\log R = 0,1125045$$
$$2 \log R = 0,2250090$$
$$\log' \left\{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right\} = 7,2675941$$
$$\log' x^3 = 7,6051076$$
$$\log' x = 9,20170253 = \log' 0,1594118$$

Remarque. Tous les résultats que nous avons calculés sont vrais, quelle que soit l'unité de longueur dont on se sert, pourvu que l'on prenne pour unité de surface et pour unité de volume, le carré et le cube qui ont respectivement pour côté et pour arête l'unité de longueur. Ainsi, lorsque l'unité de longueur est le mètre, le mètre carré est l'unité de surface, et le mètre cube l'unité do volume.

NOTE.

De l'emploi des petites tables de parties proportionnelles dans les calculs de logarithmes.

Exemple I. Trouver le logarithme de 1025683.

1° Je me sers de la 3e partie de la table :

$$\log 1025683 = 6{,}01101316 \begin{cases} 1189 \\ 127 = \text{diff. tab.} \times 0{,}3 \end{cases}$$

2° Je me sers de la 2e partie de la table :

$$\log 1025683 = 6{,}01101317 \begin{cases} 9780 \\ 339 = \text{diff.} \times 0{,}8 \\ 127 = \text{diff.} \times 0{,}03 \end{cases}$$

Dans ce dernier calcul, j'ai trouvé que la différence la plus voisine de 1025 était 424, qui ne contient pas de parties proportionnelles; mais 423 et 425 en renferment : pour avoir le produit de 424 par 0,8, je remarque que les petites tables donnent $423 \times 0{,}8 = 338$, et que $425 \times 0{,}8 = 340$; puis, comme $340 - 338 = 2$, je dois prendre pour produit, d'après les instructions de Callet*, $338 + 1 = 339$.

Pour avoir $424 \times 0{,}3$, je remarque de la même manière que $423 \times 0{,}3 = 127$, et que $425 \times 0{,}3 = 128$; puis, comme $128 - 127 = 1$, je prends 127 pour second produit : faisant la somme, je trouve le logarithme avec 8 décimales, et ce logarithme ne diffère de celui que donne directement la 3e partie de la table, que d'une unité du 8e ordre. Si je ne veux conserver que 7 figures, je force la 7e, et j'ai

$$\log 1025683 = 6{,}0110132.$$

Si, au lieu de prendre 424, j'avais pris 423, voici ce que j'aurais eu :

$$\log 1025683 = 6{,}01101307 \begin{cases} 9780 \\ 338 \\ 127 \end{cases}$$

résultat trop *faible* de 9 unités du 8e ordre.

Si j'avais pris 425 au lieu de 424, les calculs seraient les suivants :

$$\log 1025683 = 6{,}0110328 \begin{cases} 9780 \\ 340 \\ 128 \end{cases}$$

résultat trop *fort* de 12 unités du 8e ordre.

---

* Il y a une faute dans l'instruction de Callet, page 17, ligne 22 : au lieu de *table précédente*, lisez *table suivante*, puisque les nombres croissant en progression arithmétique, les différences décroissent.

Ainsi, dans les deux hypothèses, on commettrait une erreur qui pourrait aller à une unité du 7ᵉ ordre, et peut-être un peu plus; mais, d'après le premier calcul, elle sera réduite de presque la moitié.

Exemple II. Trouver le logarithme de 1034954.

1° $\log 1034954 = 6{,}01492105 \left\{ \begin{array}{l} 1937 \\ 168 \end{array} \right.$

2° $\log 1034954 = 6{,}01492108 \left\{ \begin{array}{l} 8984 \\ 210 = \text{diff. } 420 \times 0{,}5 \\ 168 = \text{diff.} \times 0{,}04 \end{array} \right.$

Ici, j'ai pris les produits de 419 par 0,5 et 0,4, parce que les différences de ces parties avec celles qui viennent de 421 sont au plus égales à 1.

$419 \times 0{,}5$ donne 210; $421 \times 0{,}5$ donne 211; $211 - 210 = 1$; $420 \times 0{,}5 = 210$;

$419 \times 0{,}4$ » 168; $421 \times 0{,}4$ » 168; $168 - 168 = 0$; $420 \times 0{,}4 = 168$.

Exemple III. Trouver le logarithme de 1073996.

1° $\log 1073996 = 6{,}03100266 \left\{ \begin{array}{l} 0024 \\ 242 \end{array} \right.$

2° $\log 1073996 = 6{,}03100262 \left\{ \begin{array}{l} 9638 \\ 364 = 404 \times 0{,}9 \\ 242 = 404 \times 0{,}06 \end{array} \right.$

$403 \times 0{,}9 = 363$; $405 \times 0{,}9 = 365$; $365 - 363 = 2$; donc $404 \times 0{,}9 = 364$,

$403 \times 0{,}6 = 242$; $405 \times 0{,}6 = 243$; $243 - 242 = 1$; » $404 \times 0{,}6 = 242$.

J'ai pris 404 pour différence, quoique j'eusse pu prendre 405, les nombres 404 et 405 étant à égale distance de la ligne sur laquelle se trouve 1073.

Pour 405, voici le calcul:

$\log 1073996 = 6{,}03100273 \left\{ \begin{array}{l} 9638 \\ 365 = 405 \times 0{,}9 \\ 243 = 405 \times 0{,}06 \end{array} \right.$

Ainsi, en prenant 404, j'ai un *déficient* de 4 unités du 8ᵉ ordre; en prenant 405, j'ai un *excédant* de 7 unités du 8ᵉ ordre: la première valeur est donc plus approchée, et cela doit être, car les différences des nombres étant constantes, les différences des logarithmes décroissent, en même temps que les nombres croissent; en sorte que si je considérais les nombres

1072000, 1073000, 1074000,

et leurs logarithmes L, L', L'',

j'aurais $L'' - L' < L' - L''$; on sera donc plus près de la vérité en prenant la différence qui est au-dessous de la ligne lorsqu'il y a incertitude, en appliquant toutefois la règle de Callet (p. 17) et en tenant compte de la correction qui a été indiquée.

Exemple IV. Trouver le logarithme de 1256498.

$$\log 1256498 = 6{,}09916177 \left\{ \begin{array}{l} 1279 \\ 311 \;\; = 345 \times 0{,}9 \\ 277 = 845 \times 0{,}08 \end{array} \right.$$

$345 \times 0{,}9 = 311$; $347 \times 0{,}9 = 312$; $312 - 311 = 1$; $345 \times 0{,}9 = 311$,

$345 \times 0{,}8 = 276$; $347 \times 0{,}8 = 278$; $278 - 276 = 2$; $345 \times 0{,}8 = 277$.

Exemple V. Trouver le logarithme de 1726892.

$$\log 1726892 = 6{,}2372651 \left\{ \begin{array}{l} 2420 \\ 226 = 251 \times 0{,}9 \\ \;\;5 = 251 \times 0{,}02 \end{array} \right.$$

Comme il y avait incertitude, vu que la ligne de 1726 est à égale distance des différences 252 et 251, j'ai pris 251.

Conclusion. *Lorsqu'il y aura incertitude sur la différence à prendre, on choisira celle qui est inférieure à la ligne correspondante aux quatre premières figures du nombre....* (le reste comme dans Callet, p. 17, sauf la modification).

Retour du logarithme au nombre.

$$6{,}01394287 = \log x.$$

$$\log x = 6{,}01394287 = \log 1032625{,}6$$

$$\begin{array}{r|l} 4053 & \\ \hline 2340 & 421 \\ \cline{2-2} 2350 & 55 \\ 245 & \end{array}$$

$$\log x = 6{,}01394287 = \log 1032625{,}6$$

$$\begin{array}{r|l} 9321 & \\ \hline 1077 & 421 \\ \cline{2-2} 2350 & 256 \\ 2450 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1077 & 420 \\ \hline 2370 & 256 \\ \cline{2-2} 2700 & \end{array}$$

Comme, par la proportion, on trouve un nombre correspondant trop grand lorsque le logarithme donné diffère peu d'une moyenne arithmétique entre les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs, il est convenable de tendre à diminuer le 4e terme, ce qui aura lieu en prenant un premier terme trop grand; donc, lorsqu'il y aura incertitude à l'égard de la différence, il sera convenable de prendre la plus grande des deux, ce qui peut d'ailleurs donner les mêmes trois premiers chiffres, ainsi que le montre l'exemple ci-dessus. Donc, règle générale, *lorsque la ligne des quatre premières figures est à égale distance de deux différences, on prend la différence supérieure.*

FIN.

608371 Biblioteca Nazionale NAPOLI

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
24,	15,	log 58922,7 = 4,770; supprimez le point-virgule.
25,	13,	log 58922,7 = 4,770, supprimez la virgule finale.
31,	22,	J'écris d'abord 4,7895634 = log; supprimez le point-virgule.
31,	26,	4,7895634 = log 61597, supprimez la virgule finale.

TABLE DES MATIÈRES.

§ I. Propriétés principales des progressions.

Nos.		Pages
1.	Ce qu'on appelle progression arithmétique ou par différence	1
2.	Former une progression dont on connaît le premier terme et la raison	2
3.	Valeur d'un terme de rang quelconque	2
6.	Insérer des moyens arithmétiques entre deux nombres donnés	3
8.	Ce qui arrive quand on insère le même nombre de moyens entre les termes consécutifs	4
10.	Ce qu'on appelle progression géométrique ou par quotient	4
11.	Former une progression dont on connaît le premier terme et la raison	5
12.	Valeur d'un terme de rang quelconque	5
15.	Insérer des moyens géométriques entre deux nombres donnés	6
18.	Ce qui arrive quand on insère le même nombre de moyens entre les termes consécutifs	7

§ II. Propriétés des logarithmes.

22.	Définition des logarithmes	9
23.	Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes des facteurs	9
25.	Logarithme d'une puissance	10
26.	Logarithme d'un quotient	11
27.	Logarithme d'une racine	11

§ III. Table des logarithmes.

30.	Formation d'une table de logarithmes — base	11
33.	Calcul du logarithme d'un nombre donné	13
36.	Caractéristique	15

§ IV. Disposition des tables de Callet.

41.	La table se compose de trois parties	16
44.	Proportionnalité des différences	19

Digitized by Google

§ V. Usage des tables.

Nos. Pages.
46. Trouver le logarithme d'un nombre entier ou décimal..... 21
49. Usage des parties proportionnelles..... 23
54. Trouver le nombre correspondant à un logarithme donné..... 28

§ VI. Éléments du calcul logarithmique.

57. Multiplication..... 37
58. Division..... 37
59. Puissances..... 38
60. Racines..... 38

§ VII. Manière d'appliquer le calcul logarithmique aux nombres plus petits que l'unité.

63. On multiplie le nombre par 10^{10}..... 39
64. Manière d'indiquer le logarithme d'un nombre ainsi multiplié..... 39
66. Retour au nombre d'un pareil logarithme..... 40
67. Moyen de suppléer à l'impossibilité d'une soustraction..... 41

§ VIII. Usage des compléments.

71. Comment on fait une division par logarithme..... 43
75. Puissances d'un nombre moindre que l'unité..... 44
76. Racines d'un nombre moindre que l'unité..... 45

§ IX. Types logarithmiques.

83. Exemples divers..... 47

§ X. Méthode des caractéristiques négatives.

84. Définition des caractéristiques négatives..... 53
85. Logarithme d'une fraction décimale..... 55
88. Extension du principe fondamental..... 56

§ XI. Des quatre opérations relatives a un logarithme a caractéristique négative.

90. Addition..... 59
91. Soustraction..... 59
93. Multiplication..... 60
94. Division..... 61
95. Exemples..... 62

Applications aux formules de la géométrie.

Rectangle, carré, triangle..... 66
Trapèze..... 67
Circonférence..... 68
Aire du cercle..... 69

Pages.
Anneau circulaire..... 70
Secteur et ellipse..... 71
Calcul de π..... 72
Parallélipipède, pyramides..... 80
Prisme tronqué..... 82
Cylindre..... 83
Cône..... 84
Tronc de cône..... 84
Sphère..... 85
Zone..... 87
Secteur sphérique..... 88

NOTE. Emploi des tables de parties proportionnelles..... 89

FIN DE LA TABLE.

Imprimerie de Ch. Lahure (ancienne maison Crapelet)
rue de Vaugirard, 9, près de l'Odéon.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA